

现代化知识文库

布尔巴基学派的兴衰



现代数学发展的一条主线

知识出版社



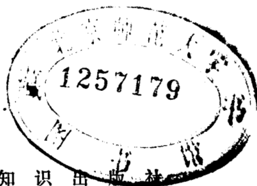
现代化知识文库

倪海曙 主编

布尔巴基学派的兴衰

——现代数学发展的一条主线

胡作玄 编著



知识出版社

1984·7·上海

装帧设计　张苏予

现代化知识文库

布尔巴基学派的兴衰

——现代数学发展的一条主线

BOURBAKI XUEPAI DE XING SHUAI

——Xiandai Shuxue Fazhan de Yi Tiao Zhuxian

胡作玄　编著

知识出版社出版

（上海古北路650号）

新华书店上海发行所发行　上海海峰印刷厂印刷

开本 850×1035 毫米 1/32 印张 5.625 插页 2 字数 129,000

1984年9月第1版 1984年9月第1次印刷

印数：1—8,000

书号：17214·1023　定价：0.77元

内 容 提 要

布尔巴基(Bourbaki)学派是对现代数学影响巨大的数学家集团。它在本世纪30年代中期由法国一群年轻数学家结合而成。他们提出"数学结构"的观念,并用这种观点整理纯粹数学,写出近四十卷的《数学原理》。本书叙述了布尔巴基学派的思想来源,成长过程,以及第二次世界大战之后的繁荣昌盛乃至60年代末开始衰落的历史,并概述布尔巴基学派及其主要成员对数学的重大贡献,最后对"数学结构"作了简要的介绍。《布尔巴基学派的兴衰》反映了20世纪数学史的主要方面,可供科学史工作者、数学工作者、研究生、大学生以及对数学史有兴趣的读者参考。

总　序

社会主义现代化建设需要知识，需要在不断更新中的现代化知识。

人类的知识是不断发展、不断更新的。现代的社会，文化科学突飞猛进，人类知识的更新速度空前加快；假定19世纪的知识更新周期是80～90年，现在已缩短为15年，而某些领先学科更缩短为5～10年。知识体系不断更新，人的知识结构也必须不断更新，进学校求得适用一辈子的知识的"一次教育"已经成为陈旧的观念。这样，不断地进行更新知识的再学习，也就成为现代人生活和工作的需要。"活到老，学到老"这句格言有了新的含义。现在，好些国家已经在研究和推行"终身教育"，又称为"知识更新教育"，它的主要方法是提供对最新知识的深入浅出的介绍，以便自学。现代化的人才要由实行全面的终身教育来造就。

人类认识日新月异，各门科学的新分支层出不穷，边缘性、交叉性学科随着发展，形成了人类知识结构的综合化和整体化的新趋向。因此，现代化社会不仅需要"专才"，而更需要"通才"，也就是具有新的知识结构的科学人才。现在许多成就卓著的科学家，极少是只限于一门专业的，他们往往在边缘性、交叉性学科领域中以博识多才取胜。当然，一个人不可能通晓一切知识的细节；但是，如果知识深广，视野开

阔，就可以具有融会贯通、触类旁通的创造能力。我国的现代化事业正需要成千上万这样的通才。

《现代化知识文库》就是为了提供知识更新的学习材料而出版的。它将系统地、全面地、通俗地介绍从自然科学到社会科学各个部门的最新成就，特别是边缘性、交叉性学科的新进展以及它的难题和解决的方向。《文库》的有些内容在国内还是第一次作系统介绍，希望它的出版对正在探索科学文化新境界的读者有所帮助。

这套文库将不断补充新的选题，分辑出版，每辑10本。编著者大多是中年科研人员，由老一辈的著名科学家担任编审。从内容到文体都将按照客观情况的发展不断更新。

知识就是力量，我们的工作希望得到大家的支持和帮助。

《现代化知识文库》编辑部

1982年5月

引　　言

Bourbaki（布尔巴基）学派是一个对现代数学有着极大影响的数学家的集体。其中大部分是法国数学家，主要的代表人物是 A. Weil（魏伊·安德烈）、J. Dieudonné（狄多涅）、H. Cartan（嘉当）、C. Chevalley（薛华荔）等人。他们的活动从 20 世纪 30 年代中期开始，曾先后在数学杂志上发表过一些文章，但主要工作是致力于编写多卷集的《数学原理》。这一著作对现代数学产生了不可忽视的作用。

Bourbaki 学派对数学的主要影响在于他们首先引进了数学结构的概念，并用这个概念来统一数学。数学结构主要是一些对象的集合，对这些对象并没有预先指定其特征，而是着重考虑它们之间的关系。定义结构一般采用公理化方法，但是与老的公理化方法不同，它们对于对象不下定义，仅只通过公理所表现的对象之间的关系来刻划对象的集体。比如群是满足一些公理的集合，一些元素不管是置换、变换、数、运动、对称动作、运算，只要满足群的公理就都具有群的结构，也就是群。在文献中有时为了指明对象，称之为置换群、变换群、运动群等等。但是 Bourbaki 学派认为数学只是研究数学结构的科学，因此只对抽象的数学结构感兴趣而对对象本身究竟是数、是形、是函数还是运算并不关心，这与以前的数学观念大相径庭。

本书分为两部分：第一部分通过叙述 Bourbaki 学派的发展过程来分析数学结构概念产生的历史渊源，从而反映现代数学史的一个主要侧面；第二部分介绍数学结构的概念，阐明 Bourbaki 学派如何通过数学结构将现代数学的大部分组织成为一个庞大的、井井有条的体系。而正是这

个体系，构成了现代数学的核心。

因为现代数学的种种概念过于深奥难懂，本书不拟对它们一一详细解释，而把重点放在围绕现代数学结构概念的形成过程、通过关键历史人物的传记及其工作评述来阐明现代数学发展的主流，同时讲述法国、德国、苏联、波兰等国数学的兴衰，而这在一般的数学史书籍中往往被忽略。

在叙述 Bourbaki 学派的历史时，着重于介绍20世纪抽象代数学、拓扑学、泛函分析的历史，同时也提到由 Bourbaki 成员及其先辈做出很大贡献的代数数论、代数几何学、代数拓扑学的简单历史。因此，本书可以被看作是现代数学史的一篇侧记。

目　　录

第一章　Bourbaki 的讣文

1968 年是不平常的一年。各地学生都在闹事。巴黎的学生举着红旗和黑旗走上街头，反对政府。有些教授也支持他们，其中有 Bourbaki 学派的创始人之一 C. Chevalley。后果是严重的。整个教育界面临一场大改革。

冬天，欧洲和北美数学界流传着 Bourbaki 的讣文：

"Cantor(康托尔)、Hilbert(希尔伯特)、Noether(诺特)诸家族，Cartan、Weil、Dieudonné、Chevalley 诸家族，

Bruhat (布吕阿)、Dixmier (狄思米埃)、Godement(古德曼)、Samuel(萨姆埃尔)、Schwartz(施瓦尔兹)诸家族，

Demazure(德马祖尔)、Douady(杜阿第)、Giraud(吉劳)、Verdier(费狄耶)诸家族，

还有其他家族以及 Adéle 和 Idéle 小姐，

悲哀地奉告 Nicolas Bourbaki 老爷于 11 月11日在 Nancago 自己的庄园中逝世。

兹订于 1968 年 11 月 23 日星期六 15 时在随机函数公墓(Markov 及 Gödel 地下铁路车站)安葬。仪式在 Koszul (广)场，射影予解式十字路口，"直积"酒吧间前举行。

按已故者遗愿，由至圣红衣主教阿列夫 1($\aleph_1$)在万用问题圣母大教堂主持弥撒，所有闭映射的等价类及纤维的全权代表出席。高等师范学校、陈班(类)学生默哀追念死者。

不奉献鲜花、花环及花束。



Bourbaki

“因为上帝就是Aleksandrov(亚历山大洛夫)的万有紧化”(Grothendieck〔格罗登迪克〕福音书第四章22页)。

一位外行人真不知道这个讣文讲的是什么昏话。不过，当时数学界大概无人不晓 Bourbaki 的大名。Bourbaki 开的玩笑可不少，这也许是他最后的玩笑吧！数学家都知道这个笑话百出的讣文中提到的人物及概念，让我们简单地介绍一下。

Cantor、Hilbert、Noether 是对现代数学影响最大的三位德国数学家。Cantor 是集合论创始人，Hilbert 是新公理方法的缔造者，Noether 是抽象代数之母，也是现代数学代数化的先行者。他们是 Bourbaki 学派的先驱。

Cartan、Weil、Dieudonné、Chevalley 是当代法国四位大数学家，是 Bourbaki 学派的首批发起者。

Bruhat、Dixmier、Godement、Samuel、Schwartz 是 Bourbaki 学派的第二代人物。都是法国数学家。

Demazure、Douady、Giraud、Verdier 是 60 年代末才活跃起来的法国年轻数学家，Bourbaki 学派的接班人。

Adéle 和 Idéle 不是两个人，而是由 Weil 和 Chevalley 分别引进的环和群，是研究类域论乃至代数群的重要工具。

Nancago 是法国 Nancy 和美国 Chicago 的结合，这两个城市都是 Bourbaki 的成员在他们 30 多年的岁月中最经常举行活动的地方。所以 Nancago 可以看成是 Bourbaki 的世袭领地。

随机函数是一个数学概念。Markov（Марков，马尔科夫）是俄国概率论专家，后来将某类随机过程称为 Markov 过程就是为了纪念他。Markov 过程是现在研究得最多的过程，与势论有关。Bourbaki 成员中有些人是势论专家。

Gödel（哥德尔）数理逻辑专家，是一位对 20 世纪数学基础影响最大的数学家，1906 年生于奥地利，第二次世界大战时赴美，1978 年在美国去世。

"直积"、"射影予解式"、"Koszul 场"都是 Bourbaki 成员发明或常用的词。Koszul（科肖尔）也是 Bourbaki 的第二代成员之一。

阿列夫 1 是 Cantor 集合论所创造的第一个不可数无穷基数。

"闭映射"、"等价类"、"纤维"都是常用的数学概念。

高等师范学校，法国最著名的高等学府，Bourbaki 成员大都是从该校毕业的。

陈班（类），原文是 class，可以作班级也可以作类讲，陈类是指陈省身示性类，是现代拓扑学、代数几何学、复解析几何学、微分几何学、代数学中最常用的不变量。此处因讲学生，一语双关。

"Aleksandrov 万有紧化"。P. S. Aleksandrov，苏联拓扑学家，莫斯科拓扑学派的领导人，由他最早提出的紧化概念是拓扑学中最重要的概念之一。

Grothendieck 福音书。Grothendieck 是法国大数学家，Bourbaki 学派成员，他创造了一大套现代代数几何学体系，并接连写出了多卷本的《代数几何学原理》及《代数几何学讨论班讲义》。讣文中在这里进行讽喻，前面是天主教在圣母大教堂做弥撒，这里又是福音书，真是七颠八倒地开玩笑。

到底 Bourbaki 是何许人也？这在数学界有着许多传说，请看……

1. Bourbaki 的传说

据说，17 世纪克里特岛的爱国者曾在两兄弟的领导下与土耳其侵略者作战。这两兄弟是 Emanuel 及 Nicolas Skordylis。他们的英勇气概给土耳其人留下十分深刻的印象，以致土耳其人后来把他们称做“Vourbachi”，即军事首领。Nicolas 和 Emanuel 十分自豪地采用了这个姓，并将它传给了子孙后代。在念这个姓时，他们把名字希腊化，把 V 变为 β，ch 变为 χ。一个多世纪以后，Emanuel 的曾孙 Soter Bourbaki，已成为一位著名的地中海海员。当时波拿巴将军(即后来的拿破仑一世)正忙于远征埃及，他的弟弟 Jérôme 派 Soter Bourbaki 去埃及，要将军尽快赶回来，因为当时政变的时机已经成熟。后来，正如人所熟知的，拿破仑成功地掌了大权。由于对 Soter Bourbaki 的恩宠，拿破仑亲自培养了 Soter Bourbaki 的三个儿子，其中有一个还成了法国的官吏，他就是 Charles Soter Bourbaki 的父亲。Charles Soter Bourbaki 是法国一位著名的将军。在 1870～1871 年的普法战争中，瑞士边境的法国军队由于 Bourbaki 的指挥才免于陷入入侵的德国人手中。据说，他的妹妹嫁给了 Nicolas Skordylis 的另一位后代。于是，从 Bourbaki 家族的两个分支的结合诞生出了数学家 Nicolas

Bourbaki。Nicolas Bourbaki 现在是 Poldavia 皇家学院的院士。不过，故事还在继续。

在第二次世界大战中，又流传着 Bourbaki 娶妻生子的广告。但是谁也没有看到过他，因此，各种难辨真伪的传说和谣言不时出现。

第二次世界大战结束后，Bourbaki 的名声越来越响，他写了许多篇论文和多本的《数学原理》，于是越来越多的人想打听他的身世，不过众说纷纭，莫衷一是。一位著名的泛函分析专家 Gottfried Kōthe（寇特）在《当代欧洲的研究者和科学家》一文中，当介绍了 Bourbaki 的工作之后只写了一句"关于我们的作者的传记材料有些神秘和复杂"，仅此而已。

尽管有种种传说，可是现在大多数的数学家仍然相信，Nicolas Bourbaki 并不存在，它只是法国一群数学家的假名。但是 Bourbaki 并不甘心，经常挑起事端，并使别人处于尴尬的境地。

美国数学会的负责人曾经收到过署名为 N. Bourbaki 的入会申请书，他们并不感到高兴，而认为这是故意与他们开玩笑，就拒绝了这一申请。学会秘书冷淡地建议 Bourbaki 可以作为团体会员来申请入会，但是由于团体会员的会费比个人会员要高很多，Bourbaki 又不愿意承认他作为一个人并不存在，此事就没有下文了。

由于 Bourbaki 大名鼎鼎，一些工具书上就逐渐列入了 Bourbaki 这个条目。Ralph P. Boas 玻亚斯是当时《数学评论》的执行编辑，他在为大英百科全书撰写 Bourbaki 这个条目时，竟宣布 Bourbaki 是一个小组。很快出版者就接到一封措辞尖锐的信，信的作者宣告，他不允许任何人对他存在的权利提出质疑。为了报复 Boas, Bourbaki 开始散布流言蜚语，说什么数学家 Boas 并不存在，而只是 B.O.A.S 的组合，这不过是《数学评论》一群编辑用的假名

而已。

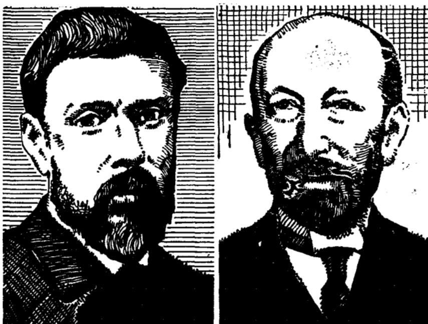
虽然有过各种玩笑和传说，Bourbaki 实际上是一批年轻的法国数学家，这已经是众所周知的了。Cartan、Dieudonné、Weil 等人都介绍过 Bourbaki 学派，Weil 甚至说，Bourbaki 这个姓是他起的，而名字 Nicolas 是他的夫人起的。也有人说 Nancy 市中有一座 Bourbaki 将军的雕像。而 Cartan 说，如果把大家合写出的《数学原理》的每位作者都列上名单未免太长了，因此送一个假名或笔名也是可以理解的。那么究竟为什么选用 Nicolas Bourbaki 就只有天晓得了。

事实上，无论是 Bourbaki 这个名字还是他的存在都无关紧要，重要的是，他做了什么？他造成了什么影响？而这是实实在在的。但是，这一学派的成员是如何向法国先辈学习而复兴了法国数学并对世界当代数学产生了重大影响的呢？

2. 法国数学的发展

18 世纪下半叶，法国成了当时数学界的中心。Lagrange(拉格朗日)和 Laplace(拉普拉斯)在法国大革命前就已经是数学界的重要人物了。法国大革命之后，特别是拿破仑时代，政府积极提倡学术，建立起高等工业学校(1794)及高等师范学校(1808，前身是 1794 年建立的师范学校)。这两所学校成为培养法国数学家的摇篮。当时人丁兴旺、成果累累。出现了象 Legendre(勒衮德)、Monge(蒙日)、Poisson(泊松)、Fourier(傅立叶)等大数学家。而同一时期在德国则没有什么可以称道的数学家。直到 18 世纪末，德国才出现了天才数学家 Gauss(高斯)，他虽被公认为 19 世纪前半期最伟大的数学家，但是德国数学方兴未艾，从整个民族来讲，仍然不能和法国相匹敌。法国数学家

在19世纪前半叶表现出了高度的创造性，Galois(伽罗华)创造了群论，Poncelet(邦色莱)创造了射影几何，Fourier创造了三角级数，Cauchy(柯西)创造了复变函数论并且开始为分析奠定基础。但是，从19世纪中叶起，法国的社会动



H. Poincaré(1854～1912)　　J. Hadamard (1865～1963)

荡、政治腐败，在科学上缺少创造与发展。尽管在数学上也出现了Sturm(施图谟)、Liouville(刘维尔)、Bonnet(博内)、Hermite(厄米特)、Jordan(若尔当)、Darboux(达尔布)等重要人物，但是比起当时的德国大师Riemann(黎曼)、Weierstrass(维尔斯特拉斯)、乃至Dedekind(戴德金)、Kronecker(克洛耐克)以及他们的学生和追随者来，数学家的数量及质量都已落在了后面。

普法战争之后，德国在普鲁士领导下获得统一，促进了工业及科学的飞速发展。不久，Göttingen和柏林已成为两大数学中心，而其它许多大学也都各有优秀的代表人物，德国数学开始进入其繁荣昌盛、兴旺发达的时期。这时，法

国虽然战败，却进入了政治上相对稳定的第三共和国时期，科学研究也渐渐得到了恢复，并在19世纪末20世纪初又重新成为世界数学的重要中心。尤其是19世纪末最大的数学家Poincaré(庞加莱)，他博大精深，极富创造性，对当时及后世产生了不可估量的影响。与其同时，E. Picard(皮卡尔)、Hadamard(阿达玛)、E. Borel(保莱尔)、Baire(拜尔)、Lebesque(勒贝格)等人在数学分析特别是复分析和实分析方面开辟了新的领域，对于20世纪前期的法国以及许多别的国家产生了极大的影响。不过，这也标志着法国数学开始趋于偏狭专门，缺少推陈出新的开创精神。再加上第一次世界大战把许多年轻有前途的学生送上战场，就更使得法国数学界青黄不接、后继乏人。正是在这种转折关头，Bourbaki学派脱颖而出，由于他们战前和战时的工作，法国数学界在第二次世界大战之后又呈现出光辉灿烂、人才济济的局面。他们再一次恢复了法国数学在历史上的光荣。

3. 德国数学赶过了法国

18世纪下半叶，法国巴黎成为数学的中心，德国几乎没有什么重要的数学家。到了1800年，由于Gauss的显露头角，使德国数学开始了一个新纪元。

Gauss在数学上的贡献是无与伦比的。他的著作——1801年出版的《算术研究》，远远走在他所处时代的前面，给后人提供了丰富的研究题材。他证明的二次互反律开启了以后许多互反律的先河。二次型的研究实际上是二次代数数域的代数数论。Gauss还在Gauss整数及高次互反律上有许多研究。他的微分几何学的研究具有划时代的意义，开创了内蕴微分几何学的新方向。他还在分析、非欧几何以及天体力学、地学、最小二乘法等方面具有非常重要的贡献。

遗憾的是,Gauss 过于喜欢独自研究,他不喜欢教学,也不大愿意同其他数学家交往,这就大大限制了他的思想的传播,因而没能发挥更大的作用。

1826 年,Crelle(克莱尔)创办了《纯粹与应用数学杂志》,这是一个专业数学杂志,它不仅为德国及国外的年轻数学家提供了发表论文的园地,大大有利于数学成果的普及,而且对德国数学的发展也起了推动作用。

也是在 1826 年,年轻的 C. G. J. Jacobi(雅可比)从柏林大学毕业后,回家乡 Kōnigsberg 任教。他是一位思想丰富、富有创建的数学家,而且还是位善于启发的教师。是他创造了"讨论班"这种教学形式,他通过这种形式常常把自己的最新发现教给学生,同时也可以启发学生主动、自觉地学习和研究。这种极好的交流方式很快在德国普及起来,但法国一直到 20 世纪 30 年代才开始采用,后来成为 Bourbaki 的一种活动形式。

Jacobi 在 1851 年去世。这时只有 Dirichlet(狄利克莱)才有资格成为 Gauss 的继承人。应该说 Dirichlet 是现代数学的真正远祖。他是头一位在数学中重视概念,并有意识地"以概念来代替计算"的人。他头一次严格地定义函数概念,给出了

$$y=\begin{cases}0, \text{当 } x \text{ 为有理数}\\1, \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

这种难用通常解析式子表示的函数。这种思想正是数学从研究"算"到研究"概念、性质、结构"的转变的开端。

Dirichlet 善于学习和整理,同时也富于独创性。他总随身带着 Gauss 的《算术研究》,反复研究、整理,后来写出了《数论讲义》,这份讲义经过 Dedekind 的整理及增补附录,通过 E. Noether 成为 Bourbaki 的思想源泉之一。

Dirichlet 把 Fourier 的三角级数加以严格化,成为数学分析最重要的工具。他还是解析数论的创始人。他引进

Dirichlet 级数，证明出任何等差级数 $an+b$ (a, b 互素；$n=1, 2, 3, \cdots$)中存在无穷多个素数这个很不显然的定理。Dirichlet 级数及其思想一直到今天都还在沿用。

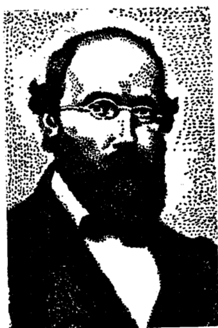
Dirichlet 同德、法等国数学家经常交流，而且注意培养年轻人，他在 Göttingen 的继承人 Riemann 就是一位。


K. F. Gauss(1777～1855)


Dirichlet(1805～1859)

1855 年，Dirichlet 从柏林到 Göttingen 接替 Gauss 的工作后，在德国就形成了两个重要的数学中心，也可以称为 Göttingen 学派和柏林学派。

Dirichlet 在柏林的继承人是 E. Kummer (库末尔)，他以对 Fermat(费尔马)大定理有卓越贡献而闻名于世。在研究高次互反律及 Fermat 大定理时，他引进了著名的"理想数"，这是后来"理想"概念的来源。同年 L. Kronecker 也到了柏林，他在数论方面有许多贡献，并且是 Cantor、Dedekind 及 Hilbert 的对立面。从这里可以看出柏林学派及 Göttingen 学派有着不同观点的两条路线的斗争大都



Riemann(1826～1866)



R. Dedekind(1831～1916)



F. Klein(1849～1925)

是Kronecker挑起来的。柏林学派的分析是以 Weierstrass 为中心。他的口号是“分析的算术化”，他追求严格，但是同情 Cantor，不过在几何方面对 Klein（克莱因）的一套不以为然。这也是后来同 Göttingen 学派对立的一方面。

19 世纪末，柏林学派的三巨头相继去世，他们的后继者如 Schwarz（施瓦兹）、Frobenius（弗洛宾纽斯）等人虽然也有许多贡献，但是已经很难说是什么学派了。

然而，在 Göttingen 大学却又是一番景象。Dirichlet 的接班人 Riemann 是 19 世纪最重要的数学家之一，他虽没有活到 40 岁，文章也发表的不多，但几乎每篇文章都开创了一个新领域。

Riemann 1851 年的博士论文开创了复变函数的几何理论的新方向。他不仅引进了 Riemann 面的观念，还把拓扑的思想用到分析中，完成了对定向闭曲面的拓扑分类，同时把同类 Riemann 面集中在一起，形成“参模”的观念。研究参模上的结构是现在最时髦的领域之一。在 Riemann 的思想中多少显露出后来集合与流形的观念。

1854 年，Riemann 的就职演说开创了 Riemann 几何学，成为后来相对论的几何基础。

同时，Riemann 对三角级数及积分理论也做出了重要贡献。

1859 年，Riemann 把解析函数论应用到数论上面，证明了一些定理，提出了几条猜想，其中有著名的 Riemann 猜想，在 100 多年之后的今天仍然没有解决。这个猜想是说 Riemann ζ 函数

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots,$$

其中 s 是复数 $\sigma+it$（σ，t 为实数），$\zeta(s)$的零点除了平凡的以外，都落在 $\sigma=\frac{1}{2}$ 的线上。对于某些其他的域，后由

Bourbaki 学派成员成功地证明了相应的 Riemann 猜想。

Bourbaki 学派思想的一个直接来源是出自同 Cantor 有着密切关系的 Richard Dedekind, 他是 Gauss 最后的学生。但是他更多的思想还是来自 Dirichlet 及 Riemann。

Richard Dedekind 于 1831 年 10 月 6 日生于 Brunswick。从 1854 年到 1858 年间，他在 Göttingen 大学同 Dirichlet 和 Riemann 建立了深厚的友谊。后来他在瑞士呆了一段时期，又于 1862 年回到故乡 Brunswick 任多科工艺学院教授，一直到 1894 年退休。他在 1916 年 2 月12日去世。

Dirichlet 的《数论讲义》(1863) 是 Gauss 的《算术研究》的最好入门书。而 Dedekind 编辑了该书的第二、三、四版。并把自己的思想作为附录刊登在书中。1871 年第二版时，他在附录X 中建立了代数数域的理论，定义了一般"理想"的概念。同时证明了理想的素理想唯一分解定理。理想理论以及代数数论后来又被 Hilbert、E. Noether 等人所发展，这些理论也是 Bourbaki 思想及研究的主要源泉的一部分。另外 Dedekind 还定义了"环"与"单位"等概念，这都是现代数学的基本概念。

Dedekind 还编辑了 Gauss 未发表的著作以及 Riemann 的全集。

1872 年，Dedekind 发表了 Dedekind 截割，为实数理论奠定了严格基础。他在 1888 年的《数是什么，数应是什么?》一书中建立了严格的数的理论，而且讨论了实数的完全系在几何以及在空间连续性问题中的作用。这些著作对于后来的发展有巨大影响。

Dedekind 还是 Cantor 集合论的第一个知情人。他和 Cantor 的许多通信后来经 E. Noether 和 Cavailles (卡瓦耶)编成书信集于 1937 年出版。

Dedekind 并没有在 Göttingen 担任过教授，但是他

在精神上是同 Göttingen 学派，特别是 Hilbert 一脉相承的。

Göttingen学派应该说是 1895 年 Hilbert 到校之后才兴旺起来的，而实际上，F. Klein 于1886 年来到 Göttingen 就已揭开了序幕。

F. Klein 主要从事几何学的研究。他在 1872 年发表的演说，以 Erlangen 纲领著称于世，把几何学用变换群的观点统一了。这种思想包含着现代数学的因素在内。后来他又把群的概念与函数论结合起来，研究 Poincaré 创造的所谓自守函数。

Klein到Göttingen 时已经把兴趣转移到应用数学、研究制度和数学教育等方面去了。由于 Klein 善于讲课，讲义组织的明确、清晰及优美，而且有着把代数、几何、数论、分析融为一体的统一数学的精神，受到数学界普遍好评，而且流传至今。

Klein 除了讲课之外，还组织讨论班，他认为讨论班可以刺激学术研究。通常，讨论的主题就是他正从事研究的问题。在讨论班上，他把自己那丰富多采的思想以及处理问题的思路毫无保留地传授给了学生们。

Klein 同教育部负责人 Althoff(阿尔托夫)私交很好，Althoff 总是尊重并采纳他的意见。他在 1895 年聘来 Hilbert 当教授，1902 年又聘来 Minkowski (闵可夫斯基)。这使得 Göttingen 成了当时的数学中心。那时曾在 Göttingen 留过学的日本著名数学家高木贞治 (Takagi Teiji) 后来回忆说，他"为这里和柏林完全不同感到吃惊，这里是来自世界各国的少壮派的集合，实际上，这里是数学世界的中心"。

不错，这里不仅培养着大批的德国数学家，光是 Hilbert 在一、二十年内指导的博士论文就有四、五十篇，而且，世界各地的年轻人象朝圣一样涌向 Göttingen, 这里简

直成了数学界的晴雨表。20 世纪的头十年间，Hilbert 对积分方程很感兴趣，于是从 Göttingen 开始，全世界都出现了积分方程热，美国一直到 20 年代还有不少人在搞积分方程。

20 年代，以 Emmy Noether 为首的抽象代数学派使整个数学世界为之一震，而在他们的影响下，又导致了 Bourbaki 学派的产生，并使法国数学获得了新生。

第二章　先驱：Cantor 与 Hilbert

Bourbaki 学派把 G. Cantor 看作他们的先驱，是因为 Cantor 创立了集合论，集合概念的列入大大扩充了数学的研究领域，给数学结构提供了一个基础。他们把 Hilbert 看作他们的先驱，是因为 Hilbert 的新公理化方法是他们的主要方法，Hilbert 的形式主义也是他们结构主义的直接前身。



G. Cantor (1845～1918)



D. Hilbert(1862～1943)

1. Georg Cantor

Georg Cantor 1845 年 3 月 3 日出生于俄国圣彼得堡

(今苏联列宁格勒)的一个商人家庭。他在中学时就对数学感兴趣。1862 年，他先到 Zürich 上大学，1863 年转入柏林大学。这时柏林大学正在形成一个数学教学与研究的中心。柏林大学的 Kummer 教授是数论专家，他以引进理想数并大大推动 Fermat 大定理的研究而举世闻名。Cantor 的早期论文“论二阶不定方程”，就是由 Kummer 推荐到系里的，这篇论文解决了 Gauss 遗留下来的一个数论问题。另一位教授 Kronecker，是一位大数学家，当时许多人都以能得到 Kronecker 的赞许为荣。Cantor 从 Kronecker 那里也学到了许多东西。不过，他所受的影响主要来自 Karl Weierstrass。Weierstrass 是一位优秀教师，也是一位大数学家，正是他把许多有才能的学生吸引到柏林大学。他的讲演给数学分析奠定了一个精确而稳固的基础，例如微积分中著名的 ε-δ 观念就是他首先引进的。他的学生常常把他的讲演稿付印并流传到外地甚至国外，这样便扩大了他的影响。许多学生都骄傲地声称自己是“柏林学派”建立在 Weierstrass 思想上的学派的成员。

Cantor 的博士论文和其后的几篇论文就是在这样的背景下写出的。在他 1867 年的博士论文中已经反映出一些“离经叛道”的观点。他认为在数学中设问的艺术比起解法来更为重要。的确，Cantor 后来也并不总是在解决问题上取得成就。他对数学的独特贡献就在于他以特殊的提问方式开辟了广阔的研究领域，这些领域中的问题部分被他解决了，部分被他的后继者们解决了，一些还没有解决的问题则始终支配着某一个方向的发展，例如著名的连续统假设。

1869 年，Cantor 取得在 Halle 大学任教的资格，不久后就升为副教授，并在 1879 年被升为正教授。一直到去世他都在 Halle 工作。Halle 是一个小地方，而且薪金微薄。他原来希望在柏林得到一个薪金较高、声望更大的教授职位，但是柏林那位很有势力而且又专横跋扈的 Kronecker

处处跟他为难，堵塞他立足柏林的所有通路。这是因为 Kronecker 对于他的集合论，特别是他的“超穷数”观点抱根本否定态度。这种“迫害”也是他后来精神抑郁的原因之一。从 1884 年起，他就不时地犯深度精神抑郁症，常常住在疗养院里。1918年 1 月 6 日，他在 Halle 大学附属的精神病院中去世。

Cantor 在历史上以集合论的创始人而知名。集合论的诞生日可以说是 1873 年的年底。1873 年 11 月，在和 Dedekind 的通信中，一个问题引起了他的注意，并且使他从对分析的研究转到一个新的方向。他认为，有理数的集合是可以“数”的，也就是说可以和自然数的集合一一对应。但他不知道对于实数集合这种一一对应是否仍然成立。虽然他认为不能再有一对一的对应，但是“讲不出什么理由”。不久之后，1873 年 12 月 12 日，他承认自己“没有认真地考虑这个问题，因为它似乎没有什么价值”，接着他又补充一句，“要是你认为它因此不值得再花费力气，那我就会完全赞同”。

与此同时，Cantor 还考虑着集合的映射问题。他在 1873 年 12 月 7 日又写信给 Dedekind，说他已能成功地证明实数的“集体”是不可数的。这一天可以看成是集合论的诞生日。其后，Dedekind 向 Cantor 取得成功表示了祝贺。在这期间，证明的意义也越来越清楚，因为 Cantor 还成功地证明了实代数数的集合是可数的。所谓代数数就是整系数代数方程的根，例如$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{5}$分别满足 $x^2-2=0$，$x^3-5=0$，所以都是代数数。反之象 π 与 l 不满足任何整系数代数方程，就称为超越数。早在 1840 年，Liouville 就通过构造的方法(当时大家认为是唯一可接受的方法)证明了超越数的存在，也就是具体造出超越数来。

1874 年，Cantor 的第一篇集合论文章发表在 Crelle 杂志上，题目是“论所有实代数数集合的一个性质”。文章

断言，所有实代数数的集合是可数的，所有实数的集合是不可数的。因此，非代数数的超越数是存在的，并且其总数要比我们熟知的实代数数多得多，也就是超越数的集合也是不可数的。Cantor 的这种证明是史无前例的，他连一个具体的超越数都没有举出来，就“信口开河”说超越数存在，而且比实代数数的“总数”多得多，这怎么能不引起当时数学家的怀疑甚至愤怒呢？

其实，Cantor 在这第一篇集合论著作中还证明了无穷之间也有差别：既存在可数的集合，也存在那种象实数集合那样的不可数的、具有“连续统的势”的集合。过去数学家认为靠得住的只有有限，而无穷最多只是模模糊糊的一个记号∞。而 Cantor 把无穷又分成许许多多“层次”，这真有点太玄乎了。

可是 Cantor 不管别人的讥笑和批判，继续深入到无穷的世界之中。

1874 年，Cantor 在瑞士度蜜月时见到了 Dedekind。Dedekind 很赞同他关于集合与无穷的一整套想法。由此 Cantor 逐步完整地建立起集合论的整个体系。

1878 年，Cantor 发表了第二篇集合论文章，其中把隐含在 1874 年文章中的“一一对应”的概念提出来作为判断两个集合相同或不同的基础。这是最原始的等价观念。两个集合相互之间能够一一对应就称为等势。势的概念于是应运而生。

在 1878 年的论文中，Cantor 还证明了一个令人惊讶不已的结果：在一维和二维的连续区域之间存在着一一对应。很快 Cantor 认识到，要是把连续性考虑在内，上述结果也就未必成立。Cantor 给出维数不变性的证明是有缺陷的。维数的拓扑不变性在 30 多年之后才由 Brouwer(布劳威尔)给出严格的证明。

从 1879 年到 1884 年，Cantor 发表了一系列题为“论

无穷线性点集"的文章，共有六篇。这些文章奠定了新集合论的基础。在这些文章中，他引进了导集和超穷数的记号，特别是在 1883 年的文章中引进新的超穷数概念，并且论证了所谓连续统假设，即可数基数后面紧接着就是实数基数。他相信这个假设是正确的，但没能证明。这个假设后来对于 20 世纪数学基础的发展起着极其重大的作用。

在这期间，他还引进了超穷数算术和良序集，以及一些拓扑概念如完备集。

Cantor 的最后两篇集合论文章发表于 1895 年和 1897 年，其中最重要的就是引进了"序型"的概念并定义出相应的序数。这个时期，反对集合论的势力逐渐削弱，但是集合论本身也已经暴露出了矛盾。Cantor 自己首先发现了集合论的内在矛盾。他在 1895 年的文章中遗留下两个悬而未决的问题：一个是连续统假说；另外一个是所有超穷基数的可比较性。他虽然认为无穷基数有最小数而没有最大数，但没有明显叙述其矛盾之处。第一个发表集合论悖论的是意大利数学家 Burali-Forti(布拉里-弗替)，他指出了所有序数的集合这个概念的内在矛盾，但是当时认为这也许能够补救。一直到 1903 年 Russell(罗素)发表了他的著名悖论，集合论的内在矛盾才突出出来，成为 20 世纪集合论和数学基础研究的出发点。

Cantor 的集合论是数学上最具有革命性的理论，因此它的发展道路也自然很不平坦。在当时，占统治地位的观念就是，你要证明什么东西存在，那就要具体造出来。因此，人只能从具体的数或形出发，一步一步经过有限多步得出结论来。至于"无穷"的世界，那完全超乎人的能力之外，决不是人所能掌握和控制得了的。集合论最激烈的反对者是 Kronecker，他认为只有他研究的数论及代数才最可靠，他有一句著名的话："上帝创造了数，其余的是人的工作。"他认为除了由数经过有限多步推出的事实外，其它一概无效。

他甚至认为圆周率 π 都不存在，因此证明 π 是超越数毫无意义。这也难怪他成为 Cantor 集合论的最大反对者。由于柏林是当时的数学中心，Kronecker 又是柏林学派的领袖人物，所以他对集合论发展的阻碍作用是非常大的。1891 年，Kronecker 去世之后，阻力一下子减少了很多。Cantor 发挥出自己的组织才能，积极筹建德国数学联合会（1891 年成立）以及国际数学家大会（1897 年第一届大会在 Zürich 召开），给集合论获得承认铺平了道路。

另一方面，许多大数学家支持 Cantor 的集合论。除了 Dedekind 以外，瑞典的数学家 Mittag-Leffler（米大格-列夫勒）在自己创办的国际性数学杂志 Acta Mathematica（数学学报，1882 年创刊）上，把 Cantor 集合论的论文用法文转载，从而大大促进了集合论在国际上的传播。柏林大学教授 Weierstrass 也是集合论的同情者。而为了捍卫集合论而勇敢战斗的则是 Hilbert。

Kronecker 死后，以 Poincaré 为首的法国数学家仍在不同程度上反对集合论。他们对数学抱着经验主义的观点，可以被看作是继承 Kronecker 的 Brouwer 直觉主义的同盟军。与他们相对立的是Hilbert的形式主义与Russell 的逻辑主义。20 世纪里，集合论已经成为整个数学的基础，60 年代后甚至进入了中小学的数学教学，可见其地位的巩固已是毫无疑义的了。而且，集合论遗留下来的问题和本身的内在矛盾，又极大地推动了 20 世纪的数学发展，促使它走向一个崭新的阶段。

2. David Hilbert

G. Cantor 给数学结构提供了存在的基础，而 Hilbert 的公理化方法给数学结构提供了方法论的基础。Hilbert 在同直觉主义者论战的时候说："谁也不能把我们从

Cantor 为我们建造的乐园中赶出来。”正是这两个人的思想的结合而形成了 Bourbaki 学派数学结构的思想基础。

1862 年 1 月23日，Hilbert 出生在东普鲁士的Königsberg，这是著名哲学家 Kant(康德)一直居住的城市。他出生时正是普鲁士王国首相俾斯麦 (Bismarck) 积极推行德国统一、建立德意志帝国(第二帝国)的时期。1871 年，威廉一世在凡尔赛宫加冕，成为德国皇帝。德国的统一促进了国内工业、技术、科学和教育的发展，从而也使德国的数学突飞猛进。

Hilbert 不象 Gauss 是个那样的天才人物，也不象他的朋友 Minkowski 年纪轻轻就荣获了巴黎大奖而名扬国际。他 1881 年进入家乡的 Königsberg 大学学习，在大学里，Hilbert 所受到的最大影响不是听讲、看书或参加讨论班，而是同两位青年数学家的交往。

一位是比 Hilbert 大三岁的 Adolf Hurwitz (胡维兹)，他是 Hilbert 的真正老师。Hilbert 还是学生时，他已经是副教授了。这位副教授学多识广，对当时数学的所有领域都有非常深入的了解。

另一位是比 Hilbert 小两岁的天才人物 Minkowski，他上大学比 Hilbert 还早半年，并且在上大学时因为解决了巴黎科学院提出的问题而获得大奖。那时他还不到 20 岁。

他们三人每天下午“准时五点”在苹果树下碰头，然后一起散步，讨论数学问题。在日复一日的散步当中，他们考察了数学世界的每一个王国，讨论了当前数学的状况，互相交流彼此的想法、研究计划和新得到的知识。就这样，三人结成了终身友谊。Hurwitz 以其全面、系统的知识对另外两人有着十分深刻的影响。Hilbert 利用这种有趣而又容易接受的学习方式象海绵吸水那样吸收着数学知识，给自己的未来事业打下了牢固而全面的基础。几个人一起集会

或边散步边讨论数学问题，Emmy Noether 和她的学生是如此，Bourbaki 学派成员也是如此，而这种最好的交流方式的首创者恐怕要算他们三位了。

1884 年大学毕业后，Hilbert 开始了自己的研究生涯。他的研究工作遍及数学的各个分支，但从来不搞支杈细节。在每个领域中，他都把自己的目标集中在重大和关键的问题上。这类问题具有下列的共同特点：

1. 清晰性和易懂性（“因为清楚、易于理解的问题能够吸引人的兴趣，而复杂的问题能使人望而却步”）。

2. 困难（“这才能诱使我们去钻研它”）但又不是完全无从下手（“免得我们徒劳无功”）。

3. 意义重大（“在通向那隐藏着的真理的曲折道路上，它是一盏指路明灯”）。

Hilbert 正是遵照上述原则去寻找和解决一个又一个的问题并取得一个又一个重大成就的。他每搞一个问题总是锲而不舍、不达目的决不罢休。在解决问题的道路上，他总是不为陈规陋习所束缚，而去寻求各种途径，充分发挥他巨大的创造才能。

他的研究工作大致可以分成五个领域六个时期：

1. 不变式理论（1885～1893）；
2. 代数数域理论（1893～1898）；
3. 数学基础；
   (1) 几何学基础（1898～1902）；
   (2) 一般数学基础（1922～1930）；
4. 积分方程（1902～1912）；
5. 物理学（1910～1922）。

(1) 不变式理论

代数不变式的观念在 18 世纪就已有萌芽，但是正式提出这个概念的是英国数学家、逻辑学家 George Boole（布尔），现在计算机科学中常谈到的 Boole 代数就是来源于他

的。1841 年，Boole 正式提出了不变式的观念。简单来讲，不变式论所研究的是一些齐次多项式(也称形式或型)在线性变换下不变的式子。比如说，$Ax^2+Bxy+Cy^2$ 是二元二次型，当我们对自变量 x,y 进行线性变换时，

$$x \text{ 变成 } x'=ax+by,$$
$$y \text{ 变成 } y'=cx+dy,$$

如果 $ad-bc=1$，那么 $Ax^2+Bxy+Cy^2$ 就变成 $A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2$。同时还会发现，A,B,C 和 A'，B'，C' 之间有着某种关系：A,B,C 的某个多项式 $J(A, B,C)$(比如说 B^2-4AC)正好等于 $J(A',B',C')$(也就是 $B'^2-4A'C'$)。也就是说，象 $J(A,B,C)$ 这样的多项式在(么模)线性变换之下是不变的，因此我们把 $J(A,B,C)$ 这样的多项式称为不变式。不变式理论中最主要的问题，就是对给定的齐次多项式求出相应的所有不变式来。更进一步的问题是：这些不变式能否由有限多个"基本的"不变式产生出来？而这些"基本的"不变式之间又有什么关系？要回答这个问题是极为困难的。1858 年英国数学家 Cayley (凯雷)对于两个变元的情形给了这问题一个解答：他说，如果多项式的次数大于8，"基本的"不变式就会有无穷多个。十多年过去了，没有人对这个结论说个"不"字。可是到 1868 年，德国数学家 Gordan(果尔丹)指出 Cayley 的结果是不对的，他可以证明任何两变元的形式的不变式都只有有限多个"基本的"不变式。他用的方法十分复杂，但写出来的都是具体公式，的确令人心服口服。这样，Gordan 便荣获了"不变式之王"的雅号。随即他又提出一个问题：对于三元型、四元型乃至 n 元型，不变式是否也具有"有限基"呢？这个著名的 Gordan 问题在英、德、法、意等国的许多数学家十几年的研究之后，仍旧未能取得多大进展。Hilbert 就是从这种数学上的第一线问题入手而走上数学研究之路的。

对于 Gordan 问题这类难题，他先吃透 Gordan 所解

决的简易的二元情形，并给出一个简单证明。而后，他发现三元、四元乃至 n 元的情形都可以用统一的方法来处理。这就是著名的 Hilbert 基定理。1888 年，他从这一定理出发，仅仅用了几页纸就推出了 Gordan 问题的一般答案：任何 n 元型的不变式都具有有限基。

这个初出茅庐的数学家不仅得出不变式论的基本定理，更重要的是他使用的方法对数学上的方法论有着革命意义。以前 Gordan 等人的证明，都是一个公式套一个公式，一步一步地把不变式具体写出来。而 Hilbert 在证明时只是由基定理出发进行逻辑推算，根本没有涉及到具体的不变式以及它们的个数。无怪乎“不变式之王” Gordan 看到 Hilbert 的证明后大喊：“这不是数学，这是神学。”许多数学家对这种证明的可靠性也表示怀疑。于是，Hilbert 又花了几年时间，用大家都习惯的构造性方法证明了主要定理——基定理。于是，大家便无话可说了，连 Gordan 最后也说，“神学也有神学的用处嘛！”正是这样，Hilbert 用存在性证明取代了构造性证明，确认了存在性证明的合法性。从那以后，存在性证明成为数学证明的主要形式，并在 Bourbaki 学派那里得到了更大的发展。

(2) 代数数域理论

研究整数性质的数论，是数学中最重要的组成部分。Gauss 说过“数论是数学的女王”，这句话当然未免夸大其词，但代数数论无疑是所有数学理论中最漂亮的。19 世纪，代数数论达到一个新的高峰。而这个理论的伟大建筑师几乎都是德国数学家。

1801 年 Gauss 发表了著名的《算术研究》，证明了二次互反律。他还把整数和有理数的概念推广到 Gauss 数域上。Gauss 数域是形如 $a+bi$ 的数，其中 a,b 是有理整数，称为 Gauss 整数。Gauss 整数具有和普通整数相类似的性质，比如可以唯一分解成素因子之积。Gauss 数域是第

一个代数数域。其后 Dirichlet 奠定了解析理论的基础，他证明出 $a+kb([a,b]=1, k=1,2,3,\cdots)$ 这样的等差级数中存在无穷多素数，并为此引进了 L 函数。他还证明了代数数域单位公式，这是代数数论的基本定理之一。

由于一般代数数域中不存在唯一的因子分解，Kummer 就引进理想数来补救，从而使 Fermat 大定理的研究迈出了关键的一步。Kummer 和 Eisenstein（艾森斯坦）分别研究了高次互反律。互反律当时被认为是代数数论中最重要的定理，在 Hilbert 著名的 23 个问题中，第 9 个问题就涉及到一般互反律。

19 世纪后半叶，Dedekind 和 Kronecker 奠定了代数数论的基础。Dedekind 引进理想的概念，Kronecker 引进除子的概念。他们的出发点不同，方向上也有很大差异。Dedekind 着眼于理想素因子的分解问题，而 Kronecker 研究怎样添加一些超越函数值来构成一些特殊的代数扩张。他们和其他数学家都得出了大量一般的和特殊的结果。

Hilbert 在代数数论所做的工作是承前启后的总结性工作。他抓住了代数数域中意义重大但是又是能够下手的问题——Abel（阿贝尔）扩张的问题。对于任意数域 k，都存在唯一的极大的非分歧 Abel 扩张 K，称为 k 的类域。类域具有很多重要的性质，所以数域的 Abel 扩张理论也称为类域论。Hilbert 把类域论归结成十来个重要定理。他本人证明了许多特殊情形，完成了整个类域论这座优美大厦的设计工作。他不但补上了原来许多研究的漏洞，而且把整个理论铸成一个统一的整体。凡是已知定理的证明他都加以推敲，直到决定选取一种"原理能够加以推广、对进一步研究最有用的"证明。对每次选取他都进行了更深一步的研究。

1893 年到 1896 年，Hilbert 完成了给德国数学会的著

名的《数论报告》，这个报告在 20 世纪里一直指导着代数数论的研究工作，成为代数数论的“圣经”。而且他的类域论的蓝图到 19 世纪 30 年代已经基本完成。而他提出许多新概念、新定理还预示着抽象代数、同调代数的发展以及拓扑学概念的引进。后来，Bourbaki 的成员们在代数数论方面也做出了卓越的贡献。

（3） 几何学基础

Hilbert 于 1895 年到 Göttingen 大学任教授，3 年之中只谈“数域”，1898 年到 1899 年的冬天，他转而讲授“几何学基础”，这无不使人感到惊讶。其实，他对几何学的兴趣已非一日。

1891 年，Hilbert 曾在 Halle 听过 Hermann Wiener（维纳）关于几何学基础的讲演。在返回 Königsberg 的路上，他在柏林车站跟别人谈起，在一切几何学命题中，“我们必定可以用桌子、椅子和啤酒杯来代替点、线、面。”这种朴素的说法，包含着他后来在《几何学基础》中阐述的根本思想，而他的公理化思想和老的公理化思想的本质区别也正是在这里。

长期以来，Euclid（欧几里得）的几何学一直是数学思维的典范。但在 Euclid 的《几何原本》一书中，实际上并没有给出点、线、面的定义，只是对直观的东西加以说明，他的五个公理是“自明的真理”，另外又提出五个公设是涉及几何学本身的，讨论的是前面定义的点、线、面之间的关系。进一步的分析发现，Euclid 几何学中有许多关系隐含在公理中（如“介于……之间”）。Hilbert 在仔细分析了所有的关系之后，给出一个几何学公理系统，其中只有三组对象：点、线、面，它们没有定义，但是满足五组公理。也就是这些对象是由公理来刻划的，你可以叫它们点、线、面，也可以叫它们别的，只要它们满足这些公理就行。后来 Bourbaki 的数学结构都是用这种办法来“定义”的，而不具体指出它们

是什么对象。即无论你怎样解释这些对象，只要它们满足这些公理,那么由公理推得的定理就一定都成立。

这样一来，过去数学那种依赖于对象和直观的狭窄圈子被打破了。数学由研究具体的数与形变成研究一般的、抽象的结构了。这正是后来 Bourbaki 思想的基础。

Hilbert 把公理化思想明确地严格地确立下来,他对公理提出了一些逻辑上的要求,即：

1. 完备性：所有的定理都可以由这些公理推导出来。

2. 独立性：假如除掉任何一条公理,就会有某些定理得不到证明。

3. 协调性（相容性或无矛盾性）：从这些公理出发不能推出互相矛盾的结果来。

Hilbert 在证明他的几何学公理体系满足上述要求时，巧妙地创造了代数的工具，利用代数模型来证明协调性和独立性。这种方法给后来的数学家建立了一个典范。

1899 年,Hilbert 的《几何学基础》讲义的出版产生了巨大影响。其中具有决定性意义的是,“那种特殊的 Hilbert 精神……,即把逻辑力量与创造活力结合起来,藐视一切陈规陋习；几乎以 Kant 式的乐观精神把各种本质关系转化为对立面,并且最充分地运用数学思想的自由……。”

在 Hilbert 的著作中,以《几何学基础》读者最多、影响最大。这本书在他生前再版了七次，他去世后又出过八、九、十版。它不仅对于几何学的影响至为巨大，而且与 Hilbert 后来关于数学基础的工作有着直接联系。

（4）数学分析

Hilbert 在 1900 年左右开始转向分析方面的研究，主要是恢复了 Dirichlet 原理的严格性,并开始从事积分方程的工作。

Dirichlet 原理是从物理学直观总结出来的原理。在力学、电磁学中都要解 Laplace 方程的边值问题，从直观

上看，方程的解的存在性是不成问题的。但是在数学上要有严格的证明。Gauss 发现这个解就是能使得某个二重积分达到极小值的函数。而 Riemann 未经证明就认为上述的函数一定存在。1870 年，一贯以严格著称的Weierstrass举出了反例，证明在某些情形下这样的函数并不存在。此后，Dirichlet 原理被打入冷宫达 30 年之久。

于是，出现了这样一种局面：一方面 Dirichlet 原理既简单明确，又有广泛应用的可能性，另一方面，对数学严格性的要求又使人们必须绕过它。有人认为只要简明有用就不需要那么严格，而另外一些人则可以为严格性牺牲掉原理的简洁和实用价值。然而，Hilbert 却与众不同，他高度赞扬了 Weierstrass 关于数学分析严格化的工作，认为严格化非但不与简化相矛盾，反而有助于方法的简化，同时，Dirichlet 原理既然如此简明有用，就必定有其内在的真实性，因此对它全面否定也不是科学的态度。就这样，Hilbert 以伟大探索者质朴无华的姿态和勇于摆脱任何传统偏见的精神开始进行研究。他的方法是先回到问题的根源，回到原始概念的简明性上，再通过巧妙的处理，消除了Weierstrass 指出的缺陷，从而使 Dirichlet 原理获得了"新生"。

Hilbert 这种善于发现问题实质的深邃的洞察力，尤其表现在他对积分方程的研究上。1900 年冬天，在 Hilbert 的讨论班上，瑞典数学家 Holmgren（霍尔姆根）报告了 Fredholm（弗雷德霍姆）最近得出的关于积分方程的初步结果。Hilbert 马上意识到一直无人问津的积分方程和无穷多变元的线性方程组之间有着一种极为密切的相似性。这种更高层次的新观点不仅使过去被人们视为畏途的积分方程成了 20 世纪初的大热门，而且还由此提炼出泛函分析最初的抽象空间的实例——l^2 空间（平方可和级数空间）和 L^2 空间（平方可积函数空间）。在积分方程的研究中，Hilbert

奠定了算子谱理论的原型，这些理论后来在 Bourbaki 的体系中占有重要地位。而且 Hilbert 不停留在具体的枝节问题上而总是加以抽象、进行普遍推广的方法，也是 Bourbaki 学派搞他们自己的著作时的楷模。

（5）数学基础论

Hilbert 的《几何学基础》发表之后，数学界反应强烈，出现了一股公理化的浪潮。因此，不仅由射影几何学的公理化促进了对数域的公理化，而且还从 Hilbert 的二维流形定义基础上发展出了一种拓扑的观点，这使得代数学和拓扑学这两个现代数学的核心在本世纪初都蓬勃发展起来。它们也是未来 Bourbaki 学派的数学结构的基础。

Hilbert 采用模型方法完成了对几何学公理协调性的相对证明，即还原到整数论的协调性。但他一直想得到协调性的绝对证明，也就是要包括整数、实数乃至 Cantor 集合论在内的证明。有了这个协调性证明，整个数学就可以安安稳稳地躺在集合论或数论的基础之床上了。

1900 年，Hilbert 在巴黎国际数学家大会上报告的 23 个问题中，第二个问题就谈到了关于算术公理无矛盾性的证明。1904 年，他在 Heidelberg 召开的第三次国际数学家大会上首次尝试给算术的无矛盾性一个证明。他先给前人的观点各贴上一个标签：Kronecker 是教条主义者，Helmholtz（赫姆霍兹）是经验主义者，Christophe（克里斯多夫）是机会主义者，对这些他都加以批判。他认为 Frege（弗瑞格）的逻辑主义方法、Dedekind 的先验方法和 Cantor 的主观判断方法更为深刻，而他自己则主张公理化方法。他的基本观点是：把数学还原成一组公式。这实质上是形式主义的来源。后来，Hilbert 热衷于搞分析和物理，所以直到 1917 年 9 月在 Zürich 作“公理化思想”的讲演时，他才重新回到数学基础问题的研究上来。此时数学界就基础问题已经争论得不可开交了，尤其值得注意的是

Brouwer 直觉主义的传播。当时，由于悖论的出现引起了数学基础的危机，1907 年，Brouwer 在题为“论数学基础”的博士论文中，点名批判 Cantor 及 Hilbert 等人的工作。他反对在数学中使用排中律，主张用构造方法来研究数学，反对“数学的存在主义”，反对“实在无穷”，反对集合论。当然，这样做可以完全消除悖论，不过也把当时一直为人们所接受的大部分经典数学抛弃掉了。

在这种情况下，Hilbert 为保卫数学成果挺身而出。他大声疾呼：“禁止数学家使用排中律就等于禁止天文学家使用望远镜和不让拳击家使用拳头一样。”他确信无须“背叛我们的科学”就能够恢复其完整的确定性，并提出要“把基础问题一下子彻底解决”。

20 年代，Hilbert 发表了一系列文章同 Brouwer 和 Weyl（韦尔）等人进行激烈论战。在批判他们的否定态度的同时，他还力求创建一个确实没有矛盾的体系。

在形式主义者看来，数学本身就是形式系统的集合。每个形式系统都包含有自己的逻辑、概念、公理、推演定理的规则（例如相等规则、代换规则等）以及由它们推出的定理。数学的任务就是发展出每一个这样的形式系统。如果一个系统按照推演规则永远不能推出 $0 \neq 0$ 或 $0=1$ 来，那么这个系统就没有矛盾。数学的真理所在就是没有矛盾，而不在于能否构造出来。Hilbert 当时面临的问题就是要证明一个形式系统没有矛盾。

在那以前，证明一个系统没有矛盾通常是把它还原成算术问题，因为人们相信算术既直观而且又在理论上是完善的。但是这种证明只能说是相对无矛盾性。Hilbert 不满足这一点，他要证明“绝对”无矛盾性，也就是说某一系统的无矛盾性不再归结为其他的理论，特别他要证明集合论、算术、实数理论的无矛盾性。

于是，Hilbert 提出一个方案，这个著名的 Hilbert 方

案，是现代证明论的开端。根据这个方案，可以把一个理论的公理清楚地用符号表示出来。由于数理逻辑的发展，这在当时是完全可以办到的。这样一来，该理论中由公理到定理的推导就可以表示成为一系列的符号变换。要是一个理论包含矛盾的话，就可以由这个理论推出两条互相矛盾的定理，它们可以简单地表示为 $0=1$ 和 $0\neq1$。因此，要证明一个理论无矛盾，只要从该理论的公理推不出上述结果来就行了。为此，Hilbert 提出一个合理要求：符号的数目是有限多个，推导步骤也是有限步。这就是所谓“有限主义”。

1930 年，奥地利数学家 Gödel 证明初等数论是不完全的，也就是说，在初等数论的形式系统中存在着既不能证明也不能否定的定理，而且他进一步加以推广，认为对于“有点意义的”形式系统，其自身的无矛盾性不能通过 Hilbert 的有限主义办法实现。这样一来，Hilbert 的方案行不通了。他只得做出让步，同意使用诸如“超穷归纳”之类的方法来证明算术的无矛盾性。

此后，数理逻辑走向专业化阶段，一般的数学家不再对数学基础问题感兴趣。同样，Bourbaki 学派对这方面论述得也很少，他们仍旧沿着 Hilbert 指引的方向前进。

Hilbert 的晚年是在德国法西斯统治时期渡过的。他十分痛苦地亲眼目睹了自己一手建立起来的 Göttingen 学派烟消云散。1943 年 2 月 14 日他在孤寂中与世长辞。而参加这位桃李满天下的大数学家葬礼的不过只有 10 个人左右。

德国数学从此开始衰落，而 Bourbaki 学派却成为 Hilbert 的继承人，使得 Hilbert 在各方面的成就都得到发扬光大！

第三章　Emmy Noether与抽象代数学的发展

古典的代数学利用符号来代替具体的数进行计算。很久以前,人们就已经会解一次方程和二次方程。到了16世纪,方程的求解成为代数学的首要问题,并且也总结出了一些解决三次方程和四次方程的算法。在以后的300年中,代数学家们主要致力于求解五次乃至更高次数的方程,但是一直没有成功。年轻的挪威数学家Abel(阿贝尔)上学时,曾经一度认为自己解五次方程已获成功。后来他发现了自己的错误,开始向另一方面试探,终于在1824年证明出对一般的五次或五次以上的代数方程不存在根式解,也就是不能通过对方程中各项系数的加、减、乘、除或开方运算而求出根来。这就宣告了代数学再沿袭旧的方法进行研究已是“此路不通!”尽管当时仍然有许多人继续研究方程的数值解和根的分布,或者利用超越函数(最简单的是三角函数)求方程的一般解,不过这已经不是代数学的主流了。

在Abel的文章发表之后不久,法国数学家Galois也证明了同样的结论。而他所使用的方法的意义和影响远比Abel要大得多。他提出的群和域的观念使整个代数学的对象发生了根本的改变。当时,这种偏离古典代数学的“异端”,自然不会立即得到承认。又经过了四、五十年的时间,人们才逐渐认识到,数学的对象除了“数”与“形”之外,还有“群”这类比较抽象的东西。更深入的研究发现,群在数学中几乎无处不在,早就有了,不仅如此,群还是数学统一性的象征,不仅是几何学能统一在它的旗帜之下,说不定整个数学都可以用群来加以统一。这样,“群论”也就堂而皇

之地成为了代数学的正统。

然而，在很长的时期里，人们只停留在研究具体的群，也就是变换群。具体来讲，就是由把方程的根互相置换的某些置换组成的置换群，或者是把图形变到它自身的某些变换组成的变换群。那么，能否将各种具体的群的共同特征抽象出来呢？即只考虑由抽象元素构成的群而不涉及到这些元素的具体特征。古典代数学不正是不管符号所表示的具体内容而只考虑能满足一定运算规则的抽象符号吗？在19世纪里，各种具体的群论接连出现，象研究方程中根的置换群论，研究几何图形变换情况的变换群或运动群理论，研究结晶体结构的晶体群理论，研究自守函数的离散变换群理论，研究流形变换的连续变换群(李群)理论等等。在这些具体群论的基础上，应自会有人来研究抽象群理论。

早在1849年，英国数学家 A. Cayley 就提出过抽象群的观念。他在后来的一系列文章中，认为群可以看成是一个普遍的观念，而不仅仅局限于置换。可是这种观念在当时并没有受到重视，因为那时的数学重视具体的结果，而不喜欢空洞的抽象。到了19世纪末，抽象群不仅可以概括所有具体群的共同性质，还能够用通过抽象方法进行研究取得的巨大成就来论证自己独立存在的价值。于是，抽象群论应运而生了。

随着集合观念的普及与公理化理论的发展，抽象群论找到了表述自己的良好方式。

群的定义一个具有二元运算(如乘法×或加法+)的集合称为群，如果它满足下面四条公理：

公理1(封闭性)，集合中任何两个元素 a、b 相乘，其乘积也属于这个集合；

公理2(结合性)乘法结合律成立

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c);$$

公理3(存在单位元素)集合中存在一个单位元素1，它

满足，对于集合中任何元素 a，有

$$a\times 1=1\times a=a;$$

公理 4(存在逆元素)对于集合中每一个元素 a，都存在集合中一个元素 a^{-1}，使得

$$a\times a^{-1}=a^{-1}\times a=1。$$

显然，群的例子很多，如除去零以外的一切有理数，对于乘法就构成一个群，所有整数对于加法也构成群。

有了抽象群的定义之后，自然能把许多具体群论的结果推广到抽象群论中来。但更主要的是，要有自己的研究课题，也就是关于结构的研究。

除了群论之外，抽象代数学另外两个分支也有了一定的发展。Galois 不仅是群论的创造者，而且也开创了域论。早在 1830 年他就建立了有限域的概念。直到 19 世纪末、20 世纪初，有人证明了任何一个有限域都同某一个 p^n 个元素的有限域同构(其中 p 是一个素数)，这才完全决定了有限域的结构。有限域虽然是抽象理论的产物，却在编码理论和统计实验设计等方面有着重要的应用。对于无穷多个元素构成的域，也有许多具体的研究，其中最主要的是德国数学家 Kummer 及 Dedekind 关于代数数论的研究工作。1897 年，Hilbert 对代数数域进行了系统的总结。后来，Hensel (亨塞尔) 在 1908 年又引进了 p-adic 数域，大大丰富了数域的内容。1910 年德国数学家 Steinitz (斯坦尼兹) 系统地阐述了抽象域的理论，奠定了抽象域论的基础。

真正使抽象代数学成为一门新兴科学的是环论。Emmy Noether 的主要贡献也即在此。交换环论是从 Dedekind 创造的理想理论出发以通常整数及代数整数为模型进行公理化而得出的。而一般的结合环则是实数、复数、四元数的自然推广。1843 年，英国数学家 R. Hamilton

(哈密顿)发现四元数而震动了全世界，这可以说是第一个“超复数”。其后，各种超复数相继出现。1870 年，美国数学家 Benjamin Peirce (皮尔斯)总结了已知的超复数，并把这一研究称为“线性结合代数”，这就是结合环理论的前身。他和其后的许多数学家还列举了许许多多的“超复数系”。19 世纪末，一些数学家开始研究这些“超复数系”的结构，其中最著名的是 Wedderburn (维德本)的结构定理，即任何结合代数，可以分解为较为简单的结合代数，而最简单的单代数又是体上的矩阵代数。

在这些准备工作的基础上，E. Noether 又利用自己的抽象方法把代数推向了近世代数的新高潮。

1. Emmy Noether

对于大多数人来说，Emmy Noether 是一个陌生的名字。但考虑到 20 世纪最大的物理学家 Einstein 是那样赫赫有名，相比之下 20 世纪最大的数学家 Hilbert 却几乎默默无闻，这种情况也就不难理解了。数学的确太抽象了，数学家考虑的问题似乎不太实际，而 Emmy Noether 又是抽象代数学的缔造者，这就更不为常人所知了。

Emmy Noether 在 1935 年 4 月 14 日去世之后，A. Einstein (爱因斯坦) 写了一篇纪念她的文章，其中讲道：“……她以前在 Göttingen 大学，近两年在 Bryn Mawr 学院工作。根据现在的权威数学家们的判断，Noether 小姐是自妇女开始受到高等教育以来有过的最杰出的富有创造性的数学天才。在最有天赋的数学家辛勤研究了几个世纪的代数学领域中，她发现了一套方法，当前一代年轻数学家的成长已证明了这套方法的巨大意义。通过这种方法，纯粹数学成为逻辑思想的诗篇。人们寻找最一般的运算概念，它将给涉及形式关系的尽可能广泛的领域以一种简单的、

逻辑的和统一的形式。在努力达到这种逻辑美的过程中，你会发现精神的法则对于更深入地了解自然规律是必须的。

“Emmy Noether 出生在一个以喜爱钻研学问而著称的犹太人家庭，尽管有 Göttingen 的伟大数学家 Hilbert 为她出力，她却始终没能在自己的国家里获得科学上的地位;但在 Göttingen，仍然有一群学生和研究者跟随她开展工作，她确实已经成为著名的教师和研究者。德国的新统治者对她常年累月所从事的不谋私利和意义重大的工作所给予的报答就是将她解聘，这使她丧失了维持简朴生计的手段和从事数学研究的机会。美国科学界有远见的朋友们有幸能为她在 Bryn Mawr 学院和 Princeton 安排了工作，这不仅使她生前在美国找到了珍惜她的友谊的同事，而且有了一批令人欣慰的学生，他们的热情使她在生命的最后几年过得最为愉快，也许还使得她获得一生中最丰硕的成果。”

在 Emmy Noether 出生百年之后的今天，Einstein 的话有些还是对的。就现在已涌现出的成百位女数学家来讲，她仍是首屈一指的，即使列举出 20 世纪一、二十位最大的数学家，她也是能够跻身其中的。

可是在 Emmy Noether 的一生中，她的经历也是颇为艰难曲折的。

她出生在犹太后裔的家庭，自然难免要遭受纳粹掌权后的洗劫。种族和性别都对她不利，她唯一的优越条件就是父亲 Max Noether（诺特）是一位数学教授。Max Noether 于 1844 年生于 Mannheim，从 1875 年起就在 Erlangen 当教授，是代数几何学专家。Emmy 的抽象代数学的具体背景有些就是来自代数几何的。当时也在 Erlangen 大学任教的 Gordan 是她家的密友，他是有名的“不变式之王”。Emmy Noether 最早的工作就是关于不变

式的，而且是跟着 Gordan 做的。

Emmy Noether 1882 年 3 月 23 日生于 Erlangen。她在 Erlangen 市立高级女子学校就读的三年中，对那些女子教育课——宗教、钢琴、跳舞都不感兴趣，只有学语言还喜欢。因此，这位从小高度近视、长相平常的女孩子的智力活动只能向语言方面发展。中学毕业后，她顺利地通过了争取当法语和英语教师的考试，取得了当语言教师的资格。当时是 1900 年的 4 月。

同年秋天，她改变了主意，不想就这样了此一生。从事数学的巨大吸引力使她决心到父亲的大学里去听课。虽说她父亲是 Erlangen 大学的教授，但对于女儿还是没有后门可走：大学不允许女生注册。不过，她可以交费听课。当时，这所学校中的几百名学生里只有两个女学生，而且只有在极其罕见的情形下，才可以征得主讲教授的同意，参加考试而取得文凭。1903 年 7 月她通过了大学考试。1903 年冬天，她来到 Göttingen 大学，直接听到了 David Hilbert、Felix Klein、Hermann Minkowski 等人的课，受到了极大的鼓舞。不过她只呆上一学期，因为这时女生已享有同男生一样的注册、考试的资格了。1904 年 10 月，Emmy Noether 正式在 Erlangen 大学注册学习，专攻数学。1907 年底，她通过了博士考试。她的学位论文的题目是“n 元形式的不变式理论”，指导教师就是 Gordan。这篇论文充满了 Gordan 式的公式，通篇都是符号演算。而且最后给出一张完整的表格，列出三元四次型共变式的完全组，共有 331 个，这真是件令人惊叹不已的工程！有趣的是，未来的抽象代数学的缔造者最初却是按步就班地构造出她的所有结果来的。

然而，她对 Gordan 的依赖并没有延续多久。Gordan 1910 年退休，1912 年便去世了。接替他的是 Ernst Fischer（菲歇尔）。在 Ernst Fischer 的指引下，Emmy Noether 开

始实现她从 Gordan 的公式化到 Hilbert 研究方式的转变。从这时一直到 1919 年，她的工作主要是不变式论，而这也正是她后来抽象理想理论的实际背景。

1915 年，Göttingen 学派的主将 Felix Klein 和 David Hilbert 都邀请她去 Göttingen。他们当时都热衷于相对论，而 Noether 的不变式论的功夫显然对于他们的研究有用。1916 年，Noether 离开 Erlangen，定居 Göttingen。Hilbert 想帮她取得在大学教书的授课资格，但是 Göttingen 大学哲学系中的语言学家和历史学家却极力反对，他们的理由就因为她是女人。Hilbert 直截了当地说："先生们，我不明白为什么候选人的性别是阻止她取得讲师资格的理由。归根结底，这里毕竟是大学而不是洗澡塘。"也许正因如此而激怒了他的对手，Emmy Noether 没有被通过。一直到第一次世界大战之后成立了共和国，她才当上讲师。

在 Klein 和 Hilbert 的相对论研究的思想影响下，她在 1918 年发表了两篇重要论文。一篇是把 Riemann 几何学和广义相对论中常用的微分不变式问题化为代数不变式问题。另一篇就是所谓 Noether 定理，它把守恒律同不变性联系在一起，这问题直到今天仍然是物理学中的基本问题。

不变式时期之后，Emmy Noether 开始走上自己独立创建"抽象代数学"的道路，而这也正是后来被 Bourbaki 学派所继承并发展成为现代代数学的起点。Noether 从不同领域的相似现象出发，把不同的对象加以抽象化、公理化，然后用统一的方法加以处理，而得出一般的理论。

实际上，抽象代数学所研究的群论、域论、环论（代数理论、理想论、模论），在经典数学中已经有各种具体实例，并从 Gauss 的时期起就陆陆续续有过一系列的研究：如 Gauss 关于二次型的研究，Galois 关于置换群的研究，Kummer 关于理想数的提出；19 世纪后期 Dedekind 和

Kronecker 分别就代数数论和代数函数论得出各自的理想理论；Frobenius 和 Schur（舒尔）等人关于群表示论的工作，许多英美数学家关于结合代数的工作；1910 年 Steinitz 关于域论的工作；它们都是 Emmy Noether 抽象代数学的先驱。而把这些加以抽象提高，统一成为干净漂亮的形式的主导思想则是来自 Hilbert 的工作。

1920 年之后，Emmy Noether 的工作可以划分为三个阶段：

Ⅰ. 1920～1926 年。这个阶段她主要从事一般理想论的研究。她在 1920 年的第一篇抽象代数著作中就已提出许多重要概念，如左理想、右理想、直和，剩余类、同构，这些现在已是代数学中最基本的概念。而 1921 年“环中的理想论”这篇论文中提出的有限条件，已经成为 Noether 环的定义，同时，文中还证明了最基本的定理：任意理想可表为准素理想的交。其后，她把这些一般概念及定理应用在代数数域及代数函数域上，很简洁地得出了更一般的定理。在这一阶段中，她发现了表示论、模论、理想论之间的联系。

Ⅱ. 1927～1929 年。这个阶段她主要从事“超复数系”即结合代数的研究。她大大推广了以前的超复数系，并和 Frobenius 的表示论联系起来，形成系统的代数理论。

Ⅲ. 1932～1935 年。她把自己的统一的抽象理论应用到数论的具体问题上并显示出了巨大威力。特别是 1932 年她和 Brauer（布劳尔）、Hasse（哈塞）一举解决了长期未解决的猜想——“代数的主定理”：代数数域上每个中心单代数都是循环代数。另外，她还通过她的代数理论，给 Hilbert、高木、Artin 发展的类域论一个代数（超复数系）的表述。在这方面 Chevalley 及 A. Weil 也有很大的贡献。

Noether 的论文只有四十多篇。她所产生的巨大影响并非完全来自论文，而主要是通过与同事和学生的接触、交

谈。她的讲课不怎么高明，既匆忙又不连贯，但是其中充满了深刻的数学思想，充满着她非同一般的生气和热情。对于那些热衷于她的工作的数学家，她的演讲有着极其丰富的内容。但是，对一般人来说，理解她的工作却不容易，还需要有人做一些普及工作。这个人很快就出现了。他就是 Van der Waerden（范德瓦尔登）。

Van der Waerden 是 Emmy Noether 的学生。他1903年2月2日生于荷兰。在 Amsterdam 大学毕业后，于1924～1925年间来到 Noether 身边。他很快就掌握了 Noether 的理论，并且还加以发展。后来，他又去 Hamburg 跟 Artin（阿廷）等人学习过。在 Noether 和 Artin 的讲义基础上，他整理了《近世代数》一书，1930年出版了第一卷，1931年又出版了第二卷。这部书在数学界引起了轰动。恰巧当时 Bourbaki 学派的主要成员 Dieudonné 正在柏林，他在这本书发行那天就立即买了来，并且说"看到这个在我面前打开的新世界，我简直惊呆了"。虽然 Dieudonné 那时早已从高等师范学校毕业，却不知道什么是理想，而且才刚刚知道什么是群！50年来，这部书曾将大批数学家引入新的领域，而且为以后的代数学书的写法树立了楷模。更为重要的是，它传播了 Emmy Noether 的思想，从根本上改变了代数学的整个面貌。因此，这本书在第四版时干脆去掉了书名中的"近世"二字，堂而皇之地成为代数学的主流了。现在，代数学论文中有关古典课题（象方程论）的研究，可以说已是百里挑一了。

如果说 Emmy Noether 的抽象代数学在20年代还未能普及的话，那么到30年代初就已经得到国际上的承认了。1928年在意大利 Bologna 的国际数学家大会上，Emmy Noether 只做了一个30分钟的小报告，而在1932年 Zürich 的国际数学家大会上，她做了一小时的全会报告，得到许多数学家的赞扬，使她荣获了胜利者的桂冠，并赢得

了国际声誉。一些老派数学家亲眼看到他们用旧式计算方法不能解决的问题被 E. Noether 用抽象代数方法漂亮地解决了，也不得不心悦诚服。

不出半年，希特勒上台，德国的文明连同 Noether 在 Göttingen 建立的学派遭到了空前浩劫。她被逐出校园，失去了教书权力。1933 年 9 月，她移居美国，在 Bryn Mawr 女子学院任教。1935 年 4 月 14 日在一次手术之后因并发症去世，享年只有 53 岁。

十多年间，在她的周围成长起了许多优秀的代数学家。



E. Noether(1882～1935)　　E. Artin(1898～1962)

她的学生中除了 Van der Waerden 之外，还有一位 W. Krull(克鲁尔)，他在抽象代数方面有极多的贡献：1928 年证明交换 Noether 环的主理想定理；无限代数扩张的 Galois 理论，1935 年他所写的《理想理论》就是这个领域的一个总结；从 1932 年起开始研究的一般赋值论以及局部环理论，这对后来代数几何学的发展有深远影响。



H. Hasse(1898～1979)　　B. L. Van der Waerden(1903～　)

Emmy Noether 不仅在抽象代数方面做了奠基性工作，而且对于拓扑学的发展也有着很大影响。

Poincaré 于 1895 年建立了组合拓扑学的基础，他把几何图形与数联系起来。其后的发展没有越出这个轨道。到 20 世纪 20 年代末，苏联的 Aleksandrov 和瑞士的 H. Hopf (浩普夫)等年轻一代的拓扑学家都到过 Göttingen，他们深受 Noether 的思想方法的影响，并且看到抽象代数的繁荣昌盛，对整个数学显示出了一种改造作用。H. Hopf 后来回忆说，E. Noether 对于拓扑学的代数化直接或间接起着很大的作用。Aleksandrov 在 1924 年以后长期与 Noether 交往，他说，正是 Noether 推动把同调群的概念引入拓扑学。实际上，现代代数学与拓扑学的密切关系正是当年 Noether 所指出的光明大道。1935年，Aleksandrov、Hopf 出版了《拓扑学 I》(“Topologie I”)，这是一本对后来拓扑学的发展有着十分重要影响的经典著作。他们在序

言中写道："Emmy Noether 对数学的一般见识的影响，并不局限于她的特殊的活动领域——代数学，而是对于同她有着数学交往的任何人都产生积极的影响。"

30 年之后在布鲁塞尔召开的拓扑学会议上，H. Hopf 怀着感激之情，以动人的言辞再次讲到 E. Noether 直接和间接对拓扑学代数化的影响。

Emmy Noether 的抽象代数学一直和代数数论保持着密切关系。许多数论问题可以化为纯代数问题，如 Hilbert 猜想的主理想定理。不仅如此，当时搞分析的数学家如 von Neumann（冯·诺依曼）也受到 Emmy Noether 的影响，从分析中看出新的代数结构，比如算子代数。

Noether 的抽象代数不是为抽象而抽象，它不仅是建立在过去数学的具体内容上，而且反过来又促进了具体数学的进一步发展。代数几何学是抽象代数的一个来源，它有着悠久的历史。19 世纪末到 20 世纪初，意大利的代数几何学家以其独特的几何方法得出许多定理。但是，天晓得他们的方法是否靠得住。因此，问题在于怎样给代数几何学奠定严格的基础。

30 年代，Van der Waerden 着手把代数几何学建立在抽象代数学的基础上。实际上代数几何的问题也就是交换环的理想问题。Van der Waerden 从这个观点出发把代数几何学抽象化，但是只取得了有限的成功。后来由美国数学家 Zariski（查瑞斯基），特别是 A. Weil 才真正完成了这一伟大工作。1946 年出版 A. Weil 的《代数几何学基础》奠定了抽象代数几何学的坚实基础。二次大战之后，Bourbaki 的成员 Serre（塞尔）及 Grothendieck 把代数几何学又推向新的高峰，并取得了惊人的结果。

Emmy Noether 不仅对代数学以及数学的其他学科有着重要影响，还在国内外培养起了一批学生，他们将她的影响带到全世界，从而使现代抽象代数学在各处生根。

1928 年冬天到 1929 年春天，Emmy Noether 作为客座教授访问了莫斯科。她在Aleksandrov 及其朋友的圈子里觉得十分舒服自在，回国后还对她的莫斯科之行赞不绝口，所以一些人开了这样的玩笑，“Emmy 太近视了，以致于什么也没看见！”她在莫斯科讲抽象代数及代数几何，并做了研究工作，还指导了一些学生，其中特别是 Pontrjagin (庞特里亚金)。他那时还很年轻，但已经在抽象代数方面循着 E. Noether 的道路开始工作了。

在 Emmy Noether 访问莫斯科之前，Aleksandrov 已经是 Göttingen 的常客了。Noether 对 Aleksandrov 及 H. Hopf 的影响不小，曾启发他们将拓扑学代数化。其他苏联数学家象 Schmidt (施密特)、Stepanov (斯捷潘诺夫)、N. G. Cebotarev (切包塔略夫) 等人也到过 Göttingen。Schmidt 是苏联群论的奠基人，他研究具有有限链的无限群，这方面的工作后来被 Kuros(库洛什)所继承，他也直接受过 E. Noether 的影响。Cebotarev 是著名的数论及代数专家，他在 Galois 理论的著作中强调过 Emmy 的以贡献及抽象方法对代数学的巨大推动。Stepanov 是苏联数学界的头面人物，对于苏联数学的发展新方向有一定的影响。

当法西斯政府把 E. Noether 解职以后，Aleksandrov 曾设法在莫斯科为 Noether 安排工作，不过由于苏联政府内部的种种原因，没有能够成功。Emmy Noether 的弟弟 Fritz Noether 也是数学家，他 1935 年去苏联，在西伯利亚的 Tomsk 当教授。Emmy Noether 去世以后，1935 年9月莫斯科曾举行过一次纪念会，纪念这位伟大的数学家和苏联人民的朋友。可是过了不久，斯大林同希特勒大谈友谊，于是 Fritz 被关进了监狱，从此再也没听到他的消息。

在 E. Noether 的身旁也有日本数学家。早在 1927 年正田建次郎(Shoda, Kenjiro) 从东京帝国大学毕业之后就跟随 E. Noether 学习抽象代数。他和他的老师高木贞治

都是日本学士院会员，也是具有世界声誉的数学家。正田建次郎回国之后，在日本立即掀起了学习抽象代数学的高潮。1932 年，正田建次郎用日文写了一本《近世代数学》，这是继 Van der Waerden《近世代数学》之后头一本同类著作，这本书大大有利于抽象代数思想在日本的普及。1928 年到 1929 年末纲恕一(Suetuna, Zyoiti) 也在 Noether 的周围出现。后来，他们和他们的学生沿着 E. Noether 的研究方向，在抽象代数 的研究中起过重要的作用。日本著名的代数学家非常之多，其中最重要的有秋月康夫(Akizuki, Yasuo)、浅野启三(Asano, Keizo)、中山正(Nakayama, Tadasi)、东屋五郎(Azumaya, Goro)、永田雅宜(Nagata, Masayosi)、铃木通夫(Suzuki, Michio)等人，他们都具有一定的国际声望。

中国数学家曾炯之 1933 年在 E. Noether 指导下完成了博士论文，其中包括著名的曾炯之定理的证明。1936 年他在 Artin 的影响下，又取得了一些成就。由于抗日战争时期环境艰苦，他不幸于 1943 年在西康去世。这是受 E. Noether 指导的唯一的中国学生。

20 年代的法国，研究德国最新数学的人可以说寥寥无几。几乎没有人过问 Hilbert 的数学基础、理想基础、拓扑学、代数几何学、代数数论等等最时髦的数学。1928 年 E. Noether 在给 Hasse 的一封信中说，也许 Châtelet(沙德利) 是唯一搞她这一行的法国学者。但是这种情况很快就得到了改变，一批年轻有为、心胸开阔的法国高等师范学校毕业生开始到国外特别是到德国学习，去看看新事物以打开眼界，从而开始给死气沉沉的法国数学界吹进了一股新风。最早是 A. Weil, 后来是 C. Chevalley 和 J. Herbrand (厄布朗)。C. Chevalley 听了 E. Noether 1929～1930 年冬季学期的课受到启发，于 1930 年写出范数剩余的论文，开始了他在类域论方面的工作。后来他同 E.

Noether 和 Hasse 经常通信，使自己很快地成长起来。

Herbrand 是一位天才，他在数理逻辑和代数数论上的贡献使数学界感到震惊。Herbrand 曾经在 Göttingen 数学会演讲过，E. Noether 十分赞赏他的才能。1931 年，他在去 Hamburg、柏林之后来到 Göttingen。他对 E. Noether 的理想理论很感兴趣，而且在这方面也做出了有价值的工作。1931 年 7 月，他离开 Göttingen 到法国境内的 Alps 山滑雪，结果不幸失事身死，当时他才 23岁。E. Noether 听到这个消息之后，对于这位大有前途的年轻数学家的不幸遭遇深感悲痛。1932 年她把 Herbrand 寄给她的关于代数函数论的结果整理好并在《数学年刊》上发表。她又根据 C. Chevalley 及 A. Weil 的建议，同 Herbrand 的许多朋友一起发表论文纪念这位年轻人，这是她去世前发表的最后一篇文章。

E. Noether 同 Bourbaki 成员的私人接触极大地推动了 Bourbaki 学派的成长，无怪乎 Bourbaki 成员把 E. Noether 当作他们的先驱之一呢！

2. Emil Artin

Emil Artin 于 1962 年 12 月 20 日因心脏病突然去世。其后两位 Bourbaki 的成员 Henri Cartan 和 Claude Chevalley 发表了纪念文章。H. Cartan 称他为天才的数学家和艺术家，是一位完全的人。

这并非溢美之词。大家公认 Artin 是近世抽象代数的奠基者之一。他在纯粹代数方面的著作并不多，主要论文都牵涉到代数数论还有拓扑学、函数论等方面，但有一点毋庸置疑，即他的全部著作的共同特点是显示出了一位代数学家的思想特征。

Artin 同 E. Noether 一样，文章不多而且大都很短，

但是却有着极大的影响,尤其是对 Bourbaki 学派。在 1930 年到 1935 年间,他的作为一个代数学家的思想方法和表述方式成了年轻一代的楷模。H. Cartan 甚至说,Artin 也许不自觉地促成了 Bourbaki 学派的出现。而 Herbrand, Chevalley 和 Weil 更是直接受他影响的。Bourbaki 的著作也多多少少追随 Artin 的思想方式与漂亮的表述方法,因为 Bourbaki 的成员对于 Artin 的文章就象对于经典著作一样一点也不陌生。尤其使 Bourbaki 成员感到骄傲的是,Artin 为 Bourbaki 的代数卷的第一至三册写了一个详尽的书评,其中不乏对 Bourbaki 思想的深刻理解与赞誉之词,从这里可以看出 Bourbaki 与 Artin 的血缘关系。

Artin 是一个对人生、艺术、科学都有着广泛兴趣的人。他对音乐的热爱同他对数学的热爱一样深沉,在音乐史方面有着令人吃惊的深邃知识。1955 年去日本开会时,他表示出对佛教很感兴趣,而且这不是一般的西方人对东方文化浅薄的好奇心。为了回答他的问题,接待他的日本同行要去请教佛学专家。实际上早在 30 多年前,Artin 就已经广泛阅读有关佛教的书籍了。不仅是他,Bourbaki 的第一代成员在文化各方面的兴趣都不亚于他们的数学,H. Cartan 弹得一手好钢琴正如 Artin 吹得一口好黑管一样,A. Weil 对日本工艺品也正如 Artin 对佛教建筑一样着迷。

Emil Artin 1898 年 3 月 3 日生于维也纳。他的艺术气质来自他的父母,父亲是位画商,母亲是位芭蕾舞演员。他在当时属于奥匈帝国而现在属于捷克的 Reichenberg 长大。童年生活不能说不舒适,但是却很孤独。幼年时他并没有表现出对数学有什么兴趣和才能,中学时代他对化学越来越喜爱。据他自己讲,他对数学发生兴趣是十六岁以后的事。

他们那一代人经历过两次战祸。第一次世界大战时,他应征入伍,当时是 1916 年,他在维也纳大学只上了一学

期课，就在步兵营一直服役到战争结束。

第一次世界大战之后，1919 年 1 月他进入 Leipzig 大学继续学习。这里的教授是 G. Herglotz（赫格洛兹）。Artin 对他一直十分崇敬，把他看作唯一的老师。两年后，他写出了博士论文，这篇接近 100 页的文章是他唯一的一篇长文章，占他全集六分之一以上的篇幅。接着他在当时数学圣地 Göttingen 大学呆了一年，然后就到了建校不久的 Hamburg 大学。1923 年他成为讲师，1925 年升为副教授，1926 年他刚 28 岁便成为正教授。由于 Artin 等人的任教，Hamburg 大学很快成为德国数学的中心之一。

1933 年希特勒上台，Artin 出于对法西斯的憎恶以及他妻子有一半犹太血统，自然想离开德国，不过德国的数学及文化传统又使他恋恋不舍，一直到 1937 年他才下决心离开，合家移居美国。他先在圣母大学呆了一年，然后在 Indiana 大学当教授，一直到他 1958 年回德国为止。由于他出色的教学才能，无论在什么地方，他的周围都有一大批活跃的年轻人，其中有很杰出的数学家，如数论专家 John Tate（塔特）（也是他女儿 Karin 的丈夫）、Serge Lang（朗，他曾以多种著书闻名于世，而且是少数不是法国人的 Bourbaki 成员之一）等人。

尽管他对美国的生活感到满意，他还是怀念德国，尤其是 Göttingen 和 Hamburg。Göttingen 是 Gauss, Dirichlet, Riemann, Klein, Hilbert, Minkowski 以及其他许多伟大数学家生活过、工作过的地方，他在那里结识了 E. Noether、Siegel、Hasse 以及其他人，共同度过了那富有创造性的 20 年代。Hamburg 的 15 年更使他难以忘怀，那是他研究与教学最活跃的时期，正是他参与了这个新的数学中心的建设。1958 年他回到 Hamburg，11 月的一天，他同 R. Brauer 在这港口城市的街道上散步。在那晚秋时节多雾、幽郁的夜晚，他似乎在寻找 30 多年前自己那充满青

春活力的身影……。

Artin 在数学上最大的贡献是在代数数论方面。代数数域是有理数域Q上的有限次代数扩张，比如说添加一个m次不可约整系数方程的根。对于一个固定的代数数域k，可以考虑它的正规扩张域K，每一个K对应一个 Galois 群$G(K/k)$。假如 Galois 群$G(K/k)$是交换群(即 Abel 群)，这个扩张就称为 Abel 扩张。类域论就研究怎样用k的元素来描述k的所有 Abel 扩张的问题。1920 年，日本数学家高木贞治完成了类域论的研究：对于每个扩张K，都对应k中的一个对象$T(K)$，即k的理想类群在某一等价关系之下的一个等价类。高木描述了这些$T(K)$的集合，而且每一个$T(K)$都刻划k的唯一的 Abel 扩张K，并且K的代数及算术性质可由$T(K)$直接推出。

对这个漂亮的定理，高木给出的证明非常繁复，中间还要用到解析的方法，但其中起主要作用的是广义 Dirichlet L 级数。因此，最好能够简化证明甚至取消掉解析方法。Artin 首先开创了这方面的工作，而最后取得成功的是 Bourbaki 的成员 Chevalley。

显然，接下去的问题是怎样推广类域论的结果：从代数数域能否推广到更一般的域上，从 Abel 扩张能否推广到非 Abel 扩张？

Artin 的博士论文研究了第一个问题。他把k不看成代数数域，而当做有限域上的代数函数域。他考虑一个最简单的情形：有限域上有理函数域的二次扩张。每一种扩张都有一个相应的ζ函数，而ζ函数最主要的问题就是 Riemann 猜想。Artin 对于许多特殊情形证明了这个猜想，他的演算技巧已经显露出一种大师的非凡能力。

这篇论文开辟了一个新方向。此后，重要成就接踵而来。1931 年，F. K. Schmidt (施密特)考虑有限域上一般的单变量代数函数域，发现了ζ函数的函数方程，并发现了

它与Riemann-Roch 定理的关系。1933 年，Hasse 证明了椭圆函数域的 Riemann 猜想。1941 年，A. Weil 最后证明了任意单变量代数函数域的 Riemann 猜想，他用的是建立在严格基础上的代数几何学方法。

Artin 最重要的工作是一般互反律。早在 18 世纪人们就已知道二次互反律，并由 Gauss 第一个给出严格的证明。后来又发现三次和四次互反律乃至一般的互反律。1923 年，Artin 猜想由一般互反律可以推出其他的互反律。他证明了一些特殊情形，但对一般情形还有一些困难。1926 年苏联数学家 Cebotarev 发表了 Frobenius 一个猜想的证明，是关于素理想集合的密度定理，这个想法正好是 Artin 所需要的，于是他给出了一般互反律的直接证明。这不仅补充了类域论，而且成为了其中的核心部分。

Artin 的互反律有许多应用，其中之一是证明了 Hilbert 关于绝对类域的猜想，即“主理想定理”，可以由有限次 Abel 群的性质推出。很快在 1930 年 Furtwängler (费特万格勒) 就证明了这个群论结果。1934 年弥永昌吉 (Iyanaga, Shokichi) 在 Artin 的指导下又给出了一个更简单的证明。

30 年代初期，类域论转向一个新的阶段。当时法国年轻数学家 Herbrand 和 Chevalley 开始对类域论感兴趣，并且对它进行算术化。从 1930 年到 1940 年，Chevalley 引进 Idéle 的概念，完成了算术化工作，彻底丢开了解析工具。而实际上 Artin 于 1931～1932 年在 Hamburg 的讲义中已经在这方面迈出了第一步，并显然对后来的工作有着重要影响。

同时，30 年代初期，E. Noether 等人就注意到类域论与结合代数理论之间的密切关系。他们证明了主定理，后来被 Hasse 用来证明 Artin 的互反律。这样，40 年代拓扑学的同调与上同调观念进入代数学时．同调代数即成为

类域论的自然表述工具。在这方面 Hochschild(浩赫希尔德)和中山正在 1952 年打下了基础，由 Artin 的学生 John Tate 完成。一贯喜欢干净漂亮的表述的 Artin 这次找到了理想的方法。他在 1951～1952 年同 Tate 合作写出其著名的类域论讲义，其中包括大量新结果，特别是 Tate 完成的上同调理论，把 Artin 的互反律变为高阶上同调群的 Tate 定理的特殊情形，这显示出新方法的巨大威力。

从 Artin 类域论的工作已经可以看出他在代数方面的倾向。1926 年以后，在 E. Noether 工作的启发下，他开始了一些纯代数的工作。首先他把 Wedderburn 著名的超复系的结构定理推广到具有链条件的结合环上，这些环的理想满足升链条件与降链条件。1939 年 Hopkins (浩普金斯)证明升链条件是降链条件的推论。后来，这种环被称为 Artin 环，而且 Artin 和他的学生们还仔细研究了 Artin 环的结构定理。

1927 年，他同他的学生 O. Schreier(施赖尔) 引进了"实域"概念，解决了 Hilbert 的第 17 个问题，这也是抽象方法的最大胜利。他研究这个问题的出发点是刻划实代数数域，他把这些域的特点总结成"实域"的概念。什么叫实域呢？他们定义在域中 -1 不能表为域中元素的平方和。显然任何有序域是实域。他们还仿照"代数封闭"定义"实封闭"，也就是一个域再不能有真正的实代数扩张域。Artin 等仅证明出"实封闭域能以唯一的方式排序"，由此他们几乎无中生有地建立了整个实域理论。

在实域的抽象理论基础上，Hilbert 的第 17 个问题就不难解决了。这个问题源于 Hilbert 1888 年的一个结果。设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是 n 个变元的实系数多项式。$f(x_1,\cdots,x_n)$ 称为"正定"，也就是说，对于任何一组实数值 $(a_1,\cdots,a_n)$，$f(a_1,\cdots a_n)$ 的值都大于或等于零，即永远不取负值。当然，$f(x_1,\cdots,x_n)$ 要是能够表示成几个实系数多项式 $f_1,\cdots,f_m$

的平方和，那么 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 显然正定。Hilbert 设问，反过来，如果 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 正定，它是否能表示为一些实系数多项式的平方和呢？他发现，除非 $n=1$，也就是一个变元，这结论不对。于是 Hilbert 退一步问：要是两个正定多项式的商，也就是有理分式，情况又如何呢？当然，这一次就要表示为实系数有理分式的平方和了，不过取值的时候注意不使分母为零即可。1900 年 Hilbert 提出这个问题以后，进展一直不大，因为大家不知怎样入手。1926 年，Artin 在"实域"理论基础上，轻而易举地解决了这个问题。他不仅肯定地回答了 Hilbert 原来的问题，而且大大超过原来的限度，实系数有理分数的实数域可以换成任意实域。不仅如此，他还能定出表为多少个有理分式的平方和。整个问题解决得干净漂亮，使许多人赞叹不已。这也反映出 Artin 不是单纯的抽象，而是真正能够运用抽象概念解决具体问题。

1921 年到 1931 年间，年轻的 Artin 的创造性达到了高潮，他不仅解决了许多大问题，而且还开创了一些新理论。1925 年他创造了"辫子理论"，把辫子的每根头发相互缠绕的复杂关系变成一套漂亮的拓扑与群论理论。他写了这篇论文之后，过了二十年才又重新拾起这方面的工作，现在这个理论有许多重要的应用。

后来的 10 年当中，局势动荡不安，Artin 几乎没发表什么文章，不过这并未表明他已经衰老。他不喜欢发表不成熟的文章，但乐于在数学界讲述他的想法。他经常把自己的思想大大方方地讲给学生听。Artin 指导的学生很多，他们的博士论文的想法有不少是来源于他的思想。有时，他还用过去的想法启发学生，让学生自己得出那些结论。因此，他对于学生们有着深刻的影响，在他学生的论文中很难分清哪些是他的，哪些是别人的。Artin 讨厌那种关于优先权的议论。他不介意做出来的成绩归在谁的名

下，他只关心做的结果和怎么做的。

由于他的大度、他的天才、他的表述方式，自然吸引了许多数学家来到他的周围。象 Van der Waerden, Witt, Zassenhaus (查森浩斯)等著名代数学家都在 Hamburg 工作过，特别是 Herbrand、Chevalley 以及 Weil 也都去过 Hamburg，他们正是同 Artin 的谈话、著作、讲课当中看到“结构”观念的，我们事后来看，这是多么明显啊。

Artin 的论文及书籍不仅思想丰富，而且表达清楚，使人喜欢阅读，而且获益不浅。他整理的讲义，总是精心加工，非常象艺术品，从中已经完全看不到原来的毛坯，以及刀刻斧凿的痕迹了。许多表述到他这里就定了型，如 Galois 理论。而且他还喜欢把著名定理的证明简化得干净而漂亮。

Artin 还留给后世许多“猜想”，其中的一些已经开辟了新的数学分支，还有一些至今没有解决，成为启发年轻一代钻研数学的动力。

使 Bourbaki 感到骄傲的是，E. Artin 在他写的唯一一篇书评中，高度评价了 Bourbaki 的《代数学》前三章。实际上，他是在年轻的 Bourbaki 成员身上看到了自己思想的发展。

第四章 拓扑学与泛函分析的发展

1. 拓 扑 学

代数学和拓扑学是近代数学的两大基石，拓扑结构也是数学结构最基本的类型之一。具有拓扑结构的集合称为拓扑空间，研究拓扑空间性质的数学分支是拓扑学。

拓扑的概念起源于极限与连续性的观念。这些概念当然从古代就有，但是人们对它的认识有着漫长的历史。在数学中微积分已涉及极限与连续性问题，但是这些基础问题一直到 19 世纪才得到认真的研究。首先做这方面工作的有 Bolzano(布尔查诺)、Cauchy 和 Abel 等人。他们对无穷极数与数列的收敛性进行研究，然后对于连续函数下了严格的定义。另一方面，复数(过去称为虚数)也可以用平面上的点做几何表示(Gauss, Argand(阿冈)等人)，这包含着后来这种思想的萌芽：任何可连续变化的量都能通过几何表示。例如，在研究 Hilbert 空间时使用几何语言就既直观又方便。

Riemann 是拓扑学的创始人。他在代数函数的研究中已经注意到，关于研究量的问题，一部分与度量有关，另一部分与度量无关，而只与位置关系 包含关系有关，这后者也就是拓扑学的研究对象。

Riemann 还是最先具有初步的“函数空间”观念的人。他在 1854 年的博士论文中曾用到“函数的集体”“形成一个连通区域，它是自己封闭的”等概念。而这点正是后来将函

数空间观念应用到具体分析上的萌芽。

在发展真正的拓扑空间理论之先，必然要对实数、数的集合、一直线上的点集、平面或空间上的点集等理论进行系统地研究。这方面，Riemann 关于积分及三角级数的研究开辟了实变函数的新方向，后又经过 du Bois Reymond（丢·布瓦·莱芒）、Dini（狄尼）及 Weierstrass 等人的不断补充和发展，到 Cantor 集其大成。同时，Dedekind 对于实数理论也进行了系统的研究。在这些工作的基础上，一些拓扑观念产生出来，特别是 Cantor 引进的邻域观念。

Cantor 集合论产生后，所遇到的第一个拓扑问题是维数问题。曲线、曲面是数学中常见的概念，人们都知道曲线是一维的，曲面是二维的。但是，Cantor 能够把一个线段的点同一个正方形的点一一对应起来，Peano 能够把一个线段连续映射到正方形上面。于是，什么是维数就成为数学要求拓扑学解决的头一个问题。

与此有关的问题就是“什么是曲线？”这也是一个拓扑问题。Jordan曾“证明”过一个定理：“平面上一条封闭曲线一定把平面分成两部分，一部分在曲线内部，一部分在曲线外部。”这个所谓的 Jordan 曲线定理，看来是句废话，经过多年才得到拓扑上严格的证明。

Cantor 的点集论虽然招至许多人的反对，可是法国及德国的函数论学派很快就从中吸取了点集论的概念。尤其是法国学派（由 Jordan、Poincaré 开始，到 Hadamard、Borel、Baire、Lebesque），他们把函数论建立在点集论的基础上，例如在 Borel 的早期著作中都有对点集论的介绍。特别是他们还证明了拓扑学的一条重要定理：n 维欧几里得空间中有界闭集一定是紧的。

与此同时，以曲线、函数为元素的集合也相继出现。其实过去已有研究以直线为元素的线几何学。但是区别在于现在不仅仅只研究集合，而且还象点集一样考虑极限、连

续性等问题。意大利数学家 Ascoli（阿斯科里）在 1883 年的论文明显出现“一簇曲线的极限曲线”这样的题目。Volterra（沃尔泰拉）在 1887 年研究的所谓“线函数”，后成为“泛函分析”的原型。Hadamard 在 1897 年第一届国际数学家大会上的报告“集合论某些可能的应用”，就首先谈到在函数集合中一个函数连续变化的各种可能性。

另一方面，Hilbert 在 1900 年利用 Riemann 的想法证明 Dirichlet 原理时，就考虑是否能将数学分析中的 Bolzano-Weierstrass 定理（即任何有界序列一定有收敛子序列）搬到函数集上面，也就是函数集的列紧性问题。这种列紧函数集合不只对变分法有用，而且对于实变函数（Ascoli，Arzelà 阿尔则拉）以及稍后的复变函数（Vitali 魏大利，Caratheodory 卡拉提奥多里，Montel 蒙大尔）都有用。这里面牵涉到如何把函数组成一个“拓扑空间”，其中一个函数由一个点代表。Fredholm 及 Hilbert 在研究积分方程时，就是用这种几何方法来考虑函数集合的。最后，Hilbert 的学生 Erhard Schmidt（施密特）通过对比函数集合与欧几里得空间而得出了 Hilbert 空间的观念。

有了具体的背景，又有了 Hilbert 的公理化方法，抽象空间的观念应运而生。1902 年，Hilbert 为“位置分析”（即拓扑学）奠定了严格的公理基础，而且用了狭义的“邻域”观念，不过他的对象仅仅是二维流形。

1904 年起，法国数学家 Fréchet（弗雷歇）开始把点集和函数集合的共同性质抽象出来。他以可数极限的观念为出发点，揭示了 Bolzano-Weierstrass 定理和 Borel-Lebesque 定理之间的关系，从而引进了列紧的概念，但是，他没有能够公理化。

1908 年，匈牙利数学家 F. Riesz（黎斯）在第四届国际数学家大会上报告了他的一个大纲，这个大纲以“聚点”为出发点，但是仍然没有能够公理化。

1914 年，Hausdorff（豪斯道夫）的《集合论大纲》出版，初步完成了一般拓扑学的公理化。他从 Hilbert 对于二维流形的公理化中选出了“邻域”概念，推广到一般情形。他提出的四条公理，成为以后公理化的典范。这些公理不仅适于把一般拓扑学系统化，而且便于应用。第一次世界大战之后，莫斯科拓扑学派的工作就是从 Hausdorff 的拓扑空间起步的。

2. 莫斯科拓扑学派

十月革命前的俄国，彼得堡是古典分析的中心，而在莫斯科主要是 Egorov(Д. Ф. Егоров，叶果洛夫)和 Luzin(Н. Н. Лузин 鲁金)领导的函数论学派。他们接受了法国学派的影响，团结一大批年轻人，Aleksandrov 就是其中的一位。他生于 1896 年，从莫斯科大学毕业之后，研究解析集合论。不过，这里需首先提到他的朋友 Uryson (П. С. Урысон，乌雷松)。Uryson 生于 1898 年，1915 年进入莫斯科大学学习物理，但他很快就被 Egorov 和 Luzin 的课程所吸引，转而研究数学。Luzin 劝 Uryson 毕业之后继续留在莫斯科大学考博士学位，Uryson 也听从了 Luzin 的劝告，留在莫斯科花了两年时间研究分析，在 1921 年 6 月取得了博士学位，并担任了莫斯科大学的讲师。这时，他的老师 Egorov 给他出了当时数学界全都注视着的基本问题让他研究，结果引导他走向拓扑学之路。年轻的 Uryson 以高度的热情跨入这个新领域，开创了拓扑学的重要分支——维数理论，为发展一般拓扑学作出了杰出的贡献。1924 年 8 月他在法国西部 Bretagne 海岸游泳，遇到暴风，不幸去世。这位只活了 26 岁的数学家，就已留给了后人两大本著作，要是他能继续活下去，真不知对数学还要有多少贡献啊！

Egorov 给 Uryson 出的题目说起来很简单，那就是

“什么是曲线?”“什么是曲面?”即如何给曲线、曲面一个内在的拓扑定义。这个曾为许多大数学家研究过但是仍然没有得到解决的问题激动着年轻人的心，他热情地夜以继日地进行钻研。但是 Hausdorff 的《集合论大纲》上面写着“我不去定义什么是曲线……”。因此，一切要从头开始。Uryson 提出一个又一个定义，然后举出正面的例子和反面的例子来考验它，看看这个定义是否能够站住脚。8月底，他终于有点眉目了。1921～1922 年在莫斯科大学讲授“连续统的拓扑学”时，他在讲课中随时把自己的新结果加进去。这样，到了 1922 年春天，维数论的系统初步形成了。这时他把两篇短文通过法国科学院院士 Lebesque 呈交到《法国科学院报告》上发表，当时这是大家都注意的最重要的科学刊物。而他的详细文章一直到 1923 年才完全发表出来。他在文章开头骄傲地宣称，这篇文章“指出什么样的一般集合能够称为线或面……”。

无独有偶，与此同时另外一位年轻的奥地利数学家



П. С. Александров(1896～1982)



Урысон(1898～1924)

K. Menger（门格尔）也发表了一套内容大致相同的理论。Menger 的父亲是一位著名的经济学家，所以 Menger 从小就受到了良好的训练，并很早就表现出具有数学天资。他的老师是著名数学家、泛函分析的奠基人之一 Hahn（哈恩）。Hahn 同 Egorov 一样，也把相同的题目交给了他的学生，当时 Menger 还不到 20 岁。Menger 的结论也是在 1921 年得出来的，不过发表的日期稍晚于 Uryson。这后来引起过一系列关于优先权的不愉快的争论。自然，Aleksandrov 完完全全站在他的好友 Uryson 一边。

Uryson 去世之后，Aleksandrov 不仅整理出版了他朋友的遗稿，而且还把他们两人进行了几年的研究工作继续了下去。20 年代，他们两人曾多次到国外，特别是到德国和法国进行过访问。当时，拓扑学的重要人物是 Brouwer,在他周围成长起了许多拓扑学家。不仅是苏联人，奥地利拓扑学家 K.Menger、L.Vietoris（魏托里斯），波兰人W.Hurewicz（呼列维奇）以及荷兰的一些年轻人都受到过 Brouwer 的影响。

除了 Brouwer 之外，他们还得到过法国数学家 Fréchet 的具体帮助。特别是关于紧空间概念的引进。他们证明了紧 Hausdorff 空间是正则空间这个重要而又基本的定理。

Aleksandrov 不仅自己得出了一些拓扑学的基本结果，他还象新兴的波兰学派以及 E. Noether 学派一样，团结了一批年轻人，一起热火朝天地搞研究。这就是莫斯科拓扑学派。

Tihonov（A. H. Тихонов 吉洪诺夫）在 1930 年证明，任意多个紧空间的乘积还是紧空间。紧是非常好的拓扑性质，在某种意义下有点象有限性。不过，并不是所有的空间都是紧的，如欧几里得空间就是一个反例。因此，Aleksandrov 引进局部紧的概念。这个概念十分重要，许

多与欧氏空间有关的理论，象 Fourier 分析、测度与积分理论等都能推广到局部紧空间上，而这些工作大都是 Bourbaki 成员在数学结构的观点指导下完成的。

1924 年，Aleksandrov 证明了一个漂亮的定理：局部紧 Hausdorff 空间可以加上一点使之变成紧空间，而且这种“单点紧化”是唯一存在的。例如平面加上一点后就成为一个封闭的(紧)球面。这些关于紧性的理论，起初颇为繁琐，后来都被 Bourbaki 学派整理得十分干净漂亮。

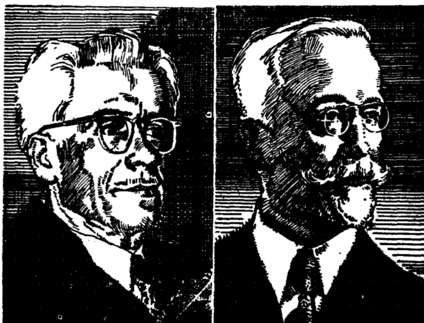
莫斯科拓扑学派关心的另一个问题是度量化问题，也就是什么样的拓扑空间存在一个距离满足象欧几里得空间中的通常距离的性质。

莫斯科拓扑学派对拓扑学的另一主要分支——组合拓扑学，也作出了巨大贡献。受 E. Noether 的启发，Aleksandrov 等人把抽象代数工具用于组合拓扑学，形成了代数拓扑学。而在当时，代数拓扑学主要是同调论。

Aleksandrov 不仅是莫斯科拓扑学派的领袖，而且在国外也有很大影响。他曾先后到德国和美国讲学。1927 年，Aleksandrov 在 Göttingen 讲学并主持讨论班，在他的合作者当中，他特别欣赏法国年轻人 A. Weil。

1928 年，在 R. Courant(库朗)的建议下，Aleksandrov 和 H. Hopf 开始合编巨著《拓扑学》。这部书原来计划出两卷，但仅在 1935 年出了第一卷。第一卷中总结了到当时为止的拓扑学成就，使四、五十年内发展起来的拓扑学又迸发出了新的活力。这部书很快成为拓扑学教学的主要参考书，并且许多国家（如日本）靠这部著作发展起自己的拓扑学。1935～1936 年间，巴黎大学举办了拓扑学讨论班，所有报告都参考了这本书。主要的报告人是 A. Weil、C. Chevalley、C. Ehresmann(埃瑞斯曼)、R. de Possel(波塞尔)、J. Leray(勒瑞)、F. Marty(马尔替)等人，他们大都是 Bourbaki 成员。当时他们已独立发展了许多拓扑学概念，其中有些显然

是受到了 Aleksandrov 的影响，比如 A. Weil 关于射影极限的概念就是来自 Aleksandrov 的空间射影谱。



Frechét(1878～1973)　　É Cartan(1869～1951)

1935 年 9 月，在莫斯科召开了第一届国际拓扑学大会，可以说莫斯科拓扑学派的活动此时已达到了顶峰。后来由于种种原因，苏联拓扑学的发展每况愈下。相反，Bourbaki 成员经过系统地整理总结前人的成就，几乎从无到有地创造了法国拓扑学派，并自 30 年代中期以后一直居于世界领先地位。他们不仅从理论上大大发展了拓扑学，更为突出的是，他们还将拓扑学的概念和方法推广至数学的其它领域，使许多数学分支发生了新的变革。而苏联到 50 年代末通过向国外学习，才又出现了一些年轻的拓扑学家，创造出一些重要成果，但是已经谈不上什么学派了。

3．泛函分析的诞生

泛函分析是研究无穷维抽象空间及其上的分析的学

科。它同建立在实数和复数基础上、研究实变函数及复变函数性质的古典分析完全不同，而是把分析建立在代数结构、拓扑结构及序结构之上。泛函分析研究函数的集合、函数空间、函数代数以及它们之间的变换——算子和算子代数等。其研究基础是抽象空间。

无穷维空间可以看成是通常的欧几里得空间的推广。直线、平面及三维欧几里得空间中的每一点都可以表示成为一个向量，向量具有长度，两个向量之间有角度，两点之间有距离……，这些概念不难推广到高维欧几里得空间，而当维数无限增加时就是无穷维空间。它不仅有着实际的背景，而且在现代物理学中是不可缺少的。

抽象空间上的函数就是所谓泛函。虽然很早就有过对泛函的研究，不过直到 19 世纪末才有比较清楚的认识。

泛函分析的发展大致经历了三个阶段。

第一阶段是意大利和法国的泛函演算时期。大约 1883～1884 年，意大利数学家引进曲线集合的极限曲线观念，也就是定义了曲线集合中的拓扑概念。过去极限只对点集定义，而这次包括了对其他的集合。不久，1887 年 Volterra 定义了线函数，实际上是曲线或函数集合上的函数，也就是泛函。这可以说是泛函概念的第一次出现。同时，Pincherle（品契莱尔）开始了另一方面的工作，即泛函运算的理论。后来，C. Arzela 对线函数进行了系统的研究，得出线性空间的观念。

法国数学家 Hadamard 在 1897 年第一次国际数学家大会上，做了关于集合论应用的报告。他郑重地考虑了把集合的思想应用到分析上。为了研究偏微分方程，他考虑闭区间[0,1]上全体连续函数所构成的族，并发现这些函数构成一个无穷维的线性空间。1903 年，他定义了这个空间上的函数，即泛函，当然这些还只是具体的结果。

法国数学家 Fréchet 是 Hadamard 的学生，他利用集



F. Riesz(1880～1956)

合论观念把前人的结果统一成为一个抽象的理论。他把他们的共同点归纳起来并且加以推广。

(1) 把函数或曲线看成一个函数或曲线的集合或空间中的点。不妨把它们看成一个抽象集合。

(2) 点列的极限概念也可以推广，他把这种有极限概念的集合称为L空间，这是后来拓扑空间的萌芽。

(3) 这种集合或空间上可以定义实函数，也就是对于集合或空间上每一点(它代表一个函数或曲线)，有一个实数同它对应，这就是泛函。由于有了极限概念，也可以定义泛函的连续性。

(4) 泛函可以进行代数运算，也可以进行分析演算，比如微分。这样一来，泛函分析也就名副其实了。

1906年，Fréchet在抽象空间中引进“距离”的概念，也就是对两个函数或两条曲线规定一个距离作为它们之间的关系。因此，函数和函数之间也有了亲疏远近的差别。这种“距离”具有类似于欧几里得空间的距离的性质，从而使得

空间有比较丰富的结构。

大约与 Fréchet 同时，Hilbert 对于积分方程进行了系统的研究。他在前人工作的基础上深刻地认识到，积分方程与无穷多变元线性方程组之间存在着相似性，而且积分方程的有解性与无穷多变元的收敛性条件有关。这样，他实际上已经得到了具体的 Hilbert 空间理论。抽象的 Hilbert 空间理论是他的学生 E. Schmidt 在博士论文中给出的。E. Schmidt 引进了实的和复的 Hilbert 空间的几何观念，他把函数看成是平方可和序列空间(l^2 空间)中的点。1907 年，匈牙利数学家 F. Riesz 等人引进平方可积的函数空间(L^2 空间)，发现其性质和 l^2 空间相同。两个月之后，德国数学家 E. Fischer 与 F. Riesz 一起证明出 l^2 空间与 L^2 空间同构，即它们不过是同一种抽象 Hilbert 空间的两种不同的具体表现而已。这也反映出研究抽象空间的重要意义。

1910 年，F. Riesz 仿照 L^2 空间引进了 $L^p(1<p<\infty)$ 空间，后来又研究了 l^p 空间。这些空间一般不是 Hilbert 空间，而是 Banach(巴拿赫)空间。此外，F. Riesz 还发现了最重要的一点，就是 L^p 空间上的连续线性泛函的全体也构成一个类似的空间 L^q，称为 L^p 的对偶空间，并且 p 和 q 有 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 的关系。这些函数空间不仅是抽象空间研究时的具体模型，而且在现代偏微分方程理论中是不可缺少的重要工具。

到了第一次世界大战结束后，泛函分析的基本要素已经齐备了。

第二阶段是在两次世界大战之间，也是泛函分析正式定型，成为一门学科的时期。在这方面起着突出作用的是波兰学派，尤其是 S. Banach。他进一步把 Hilbert 空间推广成 Banach 空间，而且用公理加以刻划，形成系统的

理论。他的出版于 1932 年的《线性运算(子)论》一书，总结了当时泛函分析的众多成果，成为泛函分析的头一部经典著作。

这个时期在另外一个方向上进行工作的是著名数学家 von Neumann。他 1926 年来到 Göttingen 大学，当时的 Göttingen 大学正处于物理学与数学的全盛时期。量子力学的产生，抽象代数、泛函分析的发展使人们的思想空前活跃。von Neumann 对 Hilbert 空间加以公理化，并且把量子力学的数学基础建立在泛函分析之上。他吸收了抽象代数的思想，用 Hilbert 空间中的有界线性算子组成代数，从而开辟了算子代数的新分支。

30 年代末，波兰数学家 S. Mazur(马祖尔)和苏联数学家 I. M. Gelfand (И. М. Гельфанд 盖尔范德) 找出了函数空间的代数结构，发展了赋范环即 Banach 代数理论，而且通过抽象方法轻而易举地证明了古典分析中的大定理。这显示了泛函分析方法的威力，也表明了泛函分析独立存在的价值。

此时泛函分析已经成为一门独立学科，但还是相当混乱、复杂，需要做进一步的清理工作。

第三阶段是泛函分析的成熟阶段。从30年代末到40年代初，虽然泛函分析的体系已经基本形成，可是来源庞杂，内容混乱。如 Banach 的书就是以写得乱七八糟毫无系统而著称。由于分析上要求更为深刻的泛函工具，这就使 Bourbaki 所做的工作具有十分关键的意义。他们在二次大战中及二次大战后，系统地研究拓扑向量空间理论，推广了对偶理论，建立了广义函数论的体系，并通过结构观念把 Fourier 分析推广到一般的局部紧拓扑群上，形成了抽象调和分析这样一门有重要应用价值的新学科，同时还把泛函分析系统地应用于线性分析及非线性分析上。这些工作使得泛函分析成为内容丰富、应用广泛的重要数学分支。

无怪乎 F. Browder (布劳德尔)在一次会议上讲，如果说，在数学分析方面，17 世纪是无穷小分析(微积分)的时代，19 世纪是函数论的时代，那么 20 世纪就是泛函分析的时代。这真是一点不错啊!

4. 波兰数学的发展

第一次世界大战结束后，随着波兰民族的复兴，以前默默无闻的波兰数学进入了一个光辉发展的新时代。战后的 20 年间，波兰数学家在使泛函分析成为一门独立学科的工作中起着独特的作用，他们引进了许多基本概念、方法和定理。在拓扑学方面，他们发展了点集方法，使拓扑学获得了体系化。他们的这些工作引起了国际数学界的极大注意，同时也是 Bourbaki 学派统一的数学体系中的重要组成部分。

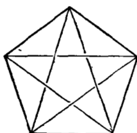
尽管老一辈波兰数学家受到法国函数论诸大家的影响，但他们并没有亦步亦趋，把自己限制在狭小的圈子里。他们大胆地反对 Lebesque 等人否定集合论的观点，对于集合论以及点集拓扑学的问题进行了深入的钻研，而且发挥出创造精神，摆脱了实函数、复函数的束缚，进入对一般集合上分析的研究。正是他们的这种推陈出新，才创造出了新的数学成就。

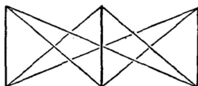
第一次世界大战之后的波兰数学家主要集中于 Warsaw 和 Lwów 两地。Warsaw 数学家以 Sierpiński (西尔宾斯基)、Janiszewski (亚尼什夫斯基)、Mazurkiewicz(马祖尔奇也维奇)为首，主要研究集合论、拓扑学。他们的学生逐年增长，形成了人数众多的 Warsaw 学派，其中主要成员有 B. Knaster(克那斯特)、S. Saks (萨克斯)、Kuratowski(库拉托夫斯基)、Zygmund(齐格孟德)、A. Tarski (塔斯基)等人。1920 年，他们创办了著名的《数学基础》(Fundamenta Mathematicae)杂志，在上面发表过许多重

要的经典性文章，引起国际上的广泛重视。

Sierpiński 从 1909 年起就开始系统地讲授集合论。当时的集合论还只不过是一些个别结果的总和，而他则力图使其成为系统的理论。在讲义的基础上，他于 1912 年出版了《集合论大纲》，这是有关集合论的最早论述之一。Sierpiński 还发表了许多关于连续统假设及选择公理的重要文章和专著。

Janiszewski 和 Mazurkiewicz 是波兰拓扑学的先行者，他们主要研究曲线及曲面的刻划问题。Kuratowski 是有国际声誉的拓扑学家，他在 1933 年出版的《拓扑学》I 中，总结了当时点集拓扑的结果。Kuratowski 在研究把一维图嵌入到平面中这一问题时，得到一个基本定理：一个图能嵌入到平面当中，当且仅当其中没有 a 和 b 那样的子图。


(*a*)


(*b*)

Borsuk（布尔苏克）及 Ulam（乌拉姆）都是著名的拓扑学家，他们研究流形映射问题。后期波兰最著名的拓扑学家是 Eilenberg（爱仑堡），他 1939 年去美国，完成了周调论的公理化，并且为同伦论奠定了基础。后来他成为 Bourbaki 的一位外国成员。

泛函分析的主要定义和思想虽然在 Lwów 学派兴起之前早已由 V. Volterra、M. Fréchet、F. Riesz 等人有所表述，但是，泛函分析成为独立的数学领域还是来自 Banach 的工作。1922 年，波兰的《数学基础》杂志发表了 Banach 的博士论文（1920）“论抽象集合上的运算及其在积分方程

上的应用"(Sur les opérations dans les ensemble abstraits et leur application aux equations integrales)。这篇论文给泛函分析奠定了基础。它不仅对于数学的进一步发展起着重大作用，而且对当时正在发展的量子力学也有着不可忽视的影响。其后，1932年出版的 Banach 专著《线性运算(子)理论》(Theóries des operations linéaires)(波兰数学专著丛书第一卷)，系统整理了他和他学生的工作，此书现在已成为泛函分析的一本经典著作。

Lwów 学派在 Banach 和 Steinhaus(斯太因豪斯)的领导下，吸引了许多青年人，其中包括一些著名数学家，比如目前在美国的 Mark Kac(卡茨，分析及概率论)和 S. Ulam(在二次大战后曾参与氢弹研制)，以及 Mazur(在 Banach 代数上做过杰出的工作)、Schauder(舍得尔，以他的不动点定理著称于世)、Orlicz(奥尔里奇，Orlicz 空间)等人。

波兰数学家的主要集会地点是咖啡馆。他们一天的大部分时间都泡在咖啡馆中，仿佛那里是他们灵感的主要来源。他们时而沉思，时而讨论，时而喝着咖啡互相凝视。因为侍者总要抹掉他们写在桌子上的计算公式，所以他们在咖啡馆中使用笔记本。日积月累，这些笔记本上记满了许多有意思的问题、想法和定理。到现在还有一些继承过去传统的新的笔记本被编订出版。Ulam 在美国也出版过问题集这样的书。这种研究方式后来也为 Bourbaki 的成员所采纳。

除了 Warsaw 和 Lwów，在 Cracow，Wilno，Poznan 等地也集中了许多数学家，他们在1919年组织起波兰数学会，会员最初有几十名，到1939年发展为200多名。20年间，他们在多种刊物上发表了1,100多篇论文，其中许多文章有着持久的重要影响。

波兰数学家经常开会，彼此交流，并且同世界各国的

数学家也有着经常和广泛的交往，他们相互访问，建立友谊与合作关系。比如，象 von Neumann、Luzin（鲁金）、Aleksandrov 等人都同波兰数学家合作搞过研究。波兰的《数学基础》、《数学研究》(Studia Mathematicae) 以及后来的《算术学报》(Acta Arithemetica)都是国际性的数学杂志。

尤其可贵的是波兰数学家的独创精神，他们不愿跟在外国人后面亦步亦趋。早在 1918 年 Janiszewski 就指出，波兰数学家的能力“不会使他们只充当外国数学中心的附庸或掮客，他们一定能够为波兰的数学赢得特殊的地位”。20 年后，这个目标果然实现了。

1939 年 9 月 1 日，德国法西斯侵入波兰，跟着苏联军队也进占波兰东部。随着希特勒执行巴巴罗沙计划，波兰全境都陷入了纳粹的铁蹄之下。波兰人民遭到重大的牺牲，许多数学家死在集中营里。象 Banach 这样的著名数学家也只好在一家研究所里喂养虱子。只有少数幸运者跑



B. Banach(1892～1945)　　S. Eilenberg(1914～　)

到国外继续他们的研究工作，而这些人大都成为某一数学分支的著名人物，例如代数拓扑学家 Eilenberg，逻辑学家 A. Tarski，统计学家 J. Neyman(耐曼)，分析学家 M.Kac，调和分析专家 A. Zygmund，以及 Ulam 等人。他们继承了波兰数学学派的光荣传统，反映了波兰数学家生动活泼的创造精神。

第五章 青年一代的聚会

1934 年冬天，在 Julia（儒利亚）的讨论班上，一些高等师范学校的毕业生开始拟定一个庞大的计划，他们约定 1935 年 7 月在巴黎的一家饭馆召开第一次 Bourbaki 大会。其中的主角我们在下边一一加以介绍。

1. André Weil

毫无疑问，André Weil 是 Bourbaki 学派的精神领袖，也是大家（当然不包括那些反 Bourbaki 的数学家）公认的在世最伟大的数学家。他是犹太人的后裔，1906 年 5 月 6日生于巴黎。巴黎的高等师范学校是法国最难考的学校，每年各科加起来只招收 50 名学生。有许多人为上师范学校考到头发发白，有点象中国古代考状元的劲头。一般人若能在中学毕业后的一二年内考上就相当不错了。Weil 无疑是位天才，他 16 岁就考上了这所最高学府，1925 年毕业时才 19 岁。当时，德国的讨论班制度已经搞了近百年了。可是，法国学生还必须攻读经典的分析著作。幸亏大数学家 Hadamard 在法兰西学院开设了唯一的一个讨论班，名称就叫做“论文分析”，这可以说是给年轻人打开眼界的唯一窗口。这个讨论班只介绍当时数学的最新成就。Weil 一方面精读了许多经典著作，一方面关心着最新的课题，并很快就研究出了一些成果，它们都是当时一些最新成果的扩大与发展。1926 年，他写出第一篇论文“论负曲率曲面”，把 Carleman（卡勒曼）不等式由极小曲面推广到一般的单连通曲面，并指出对于多连通曲面不成立。1927 年又开始

研究当时刚刚兴起的泛函分析，接着就进入了他的主攻领域——数论。1928年，他完成了重要论文“代数曲线上的算术”而获得博士学位，这时他才22岁。

1922年，英国数学家 Mordell(莫代尔)证明过一个重要定理。这个问题也是 Poincaré 等许多大数学家曾经研究过的。一个有理整系数的不定方程 $y^2=x^3-Ax-B$，它的有理数解(x, y)有多少？如果画一条曲线，在曲线上坐标都是有理数的有理点有多少？如果曲线的亏格为1（一般都如此），则有理点有有限基，也就是所有有理点(x, y)都可以表示为有限多个有理点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)、…、(x_n, y_n)的线性组合。而 A. Weil 的论文对这个结论进行了推广：1. 不仅是亏格为1，而且对任意有限亏格都成立；2. 不仅是有理数域，而且对有限域或代数数域都成立。这项工作既使 Mordell 的定理得到了推广，又开辟了不定方程的一个新方向。而这只是一个22岁的青年初露头角的作品。

在大学毕业之后，A. Weil 到罗马呆了一年，参观了古罗马的许多文化古迹，还与意大利数学家进行了广泛的接触，特别是意大利的泛函分析学派与代数几何学派对他后来的工作甚有影响。1926～1927年，他去了 Göttingen 和柏林，这两个地方都是当时的世界数学中心。那时，E. Noether 和她的学生们正在 Göttingen 创建抽象代数，Aleksandrov 也在积极地研究拓扑学，这两项工作正好是未来新数学的两大支柱。德国的代数数论在当时已首屈一指，而法国在这方面却十分薄弱，正是 A. Weil 和 C. Chevalley 在20年后使这种局面大为改观。回到法国后，A. Weil 写出了他的博士论文。

1930～1932年，A. Weil 到当时英属印度的 Aligarh 的穆斯林大学当教授。1932～1933年，他又在 Marseille 当了一年教师。从1933年秋到1939年，他到 Strasbourg 大学任教，先是讲师后升为教授，在这期间他同 H. Cartan

建立了深厚的友谊。

这个时期他考虑的问题很广，从 Poincaré 研究过的动力系统问题到多复变函数、从代数函数论到有限群，但他的主要方向还是代数簇上的算术。

1934 年，Bourbaki 成员开始计划编写《数学原理》，并且决定 1935 年 7 月在巴黎 Besseen-Chandesse 饭店召开第一次大会。在这次会议上讨论的一般拓扑问题，使 A. Weil 对一般拓扑学的一些基本问题很感兴趣。1935 年 9 月，他去莫斯科参加第一次国际拓扑学大会。当时大家都关心的一个问题是拓扑群的理论，许多人都对拓扑群的度量化问题感兴趣。几乎同时有许多人都证明出了某些群可度量化。A. Weil 进一步考虑了拓扑群上的积分问题。他在 1936 年底写完了《拓扑群的积分及其应用》，但直到1940 年底才出版。这本书反映出结构的观念，开辟了群上的调和分析的新领域。

随着二次大战的临近，法国开始扩军备战。A. Weil 不愿意服兵役，于 1939 年夏天当了逃兵。他到了芬兰，这时苏联正对芬兰提出了领土要求。当时在 1936 年首次荣获国际数学家大会 Fields(菲尔兹)奖的年轻数学家 Ahlfors(阿尔弗斯)也参加对苏联飞机的监视活动。A. Weil 恰巧来到了 Ahlfors 值勤的小岛，两个人便谈起数学来。Ahlfors 搞的是单复变函数论，单复变函数的一项突出成就是 Nevanlinna（耐凡林娜）的值分布理论，Ahlfors 考虑可以把该理论推广到多复变函数上去，但关键是微分几何的 Gauss-Bonnet 公式。他向 Weil 提出挑战：如果 Weil 能证明高维的 Gauss-Bonnet 公式，那么他就可以把 Nevanlinna 的漂亮理论推广到多复变函数。其后不久，Weil 到美国同 Allendorfer（阿伦道弗）合作解决了这个问题，不过 Ahlfors 的推广还是未能作出，因为实际工作比他想象的要难得多。

1940年初，A. Weil 回到法国后便被关进了军事监狱，1940年的2～5月，他在 Rouen 的“新生”监狱服刑。可他很镇定，在服刑期间仍然继续他的研究工作，他一面考虑 Bourbaki《数学原理》的手稿，同时还与亲友进行了大量的通信。他的妹妹Simone Weil（魏伊·西蒙娜）也是高等师范学校的高才生，但她怀有宗教的热情，同情被压迫的人民。她还亲自到工厂去做工以便真正体会工人的生活。在第二次世界大战中，她积极参加抵抗运动，由于长期劳累又经常绝食，她不幸于1943年就去世了，当时年仅34岁。第二次世界大战以后，她的著作在西方陆续出版，引起了很大的反响。她不仅有高尚的道德情操而且才华过人，对于当时科学的进步非常了解，A. Weil 经常同她通信谈论专门的数学问题。

A. Weil 出狱以后，德国人也快要攻占法国了。于是他从 Rouen 跑到英国，后来又到过 Marseille 和 Clermont-Ferrand，最后于1941年1月乘 Martinique 号船赴美。

2. Jean Delsarte

Delsarte（德尔萨特）是 Bourbaki 学派中年纪最大的一位，Weil 将他称为 Bourbaki 集会的首倡者和组织者。

Delsarte 1903年10月19日生于 Fourmies。他也是在1922年考进高等师范学校，1925年毕业。他和 Weil 同居一室，两人结下了很深的友谊。不过，他们的研究方向有很大的不同。Delsarte 主要研究分析，研究 Hilbert 空间的算子理论。他在研究中不局限于古典的方法，而尽量采用抽象的分析语言和工具。其中特别重要的是他引进的“平均周期函数”。而且，他对力学及物理学很感兴趣，对于相对论及量子力学中的问题都有过研究。

Delsarte 在生活上较为顺利，工作也比较稳定。他在

1927 年底就在 Nancy 大学任教，其后一直在那里，而且使 Nancy 成为 Bourbaki 学派的一个基地，他们杜撰的 Nancago 大学，前半部就是取自 Nancy。

对于高等师范的毕业生来说，一开始就脱离开古典分析是很困难的。而 Delsarte 却知难而进，马上就把群及 Hilbert 空间搬到积分方程论上来。他不象过去那样研究一个个的具体方程，而是研究算子群及其不变性质。他还尝试研究可解群在 Hilbert 空间中的表示问题，但是这个问题提得太早了，当时还不可能得出什么结果。直到 60 年代，Bourbaki 的许多新成员才在这方面取得进展。

Delsarte 在数学上最重要的贡献之一是引进了“平均周期函数”。1923 年，H. Bohr(玻尔)（著名物理学家 N. Bohr 的弟弟）引进的“概周期函数”在数学界、尤其对数学分析产生了很大影响，这给 Delsarte 留下很深的印象。他认为 Bohr 考虑的显然是数直线的平移群作用下的不变性，于是他从另外一个角度来推广。周期函数的积分，一个周期等于一个常数(可以令它 = 0)，如果现在乘上一个函数再积分(卷积)也是零，就叫平均周期函数。后来，L. Schwartz、Kahane（卡哈纳）和他本人又把乘上的函数推广成测度或广义函数。他还把平均周期函数做成拓扑向量空间，并用来研究谱分析和谱合成。

30 年代末期，Delsarte 发表了一系列论述发展法国的科学研究问题的文章。当时，诺贝尔奖金获得者 Jean Perrin(贝仑)任法国第一任负责科研的副国务秘书，正积极筹办“法国国家科学中心”，对此，Delsarte 给予了大力协助，显示出他具有组织者的才能。

3. Henri Cartan

Bourbaki 学派中，H. Cartan 可以说是最好的教师。他

精彩的教学和他组织的著名的讨论班，培养出了许多学生，其中有许多是当代优秀的数学家。

Henri Cartan 的父亲 Élie Cartan 是 20 世纪最重要的数学家之一，他对于微分几何及李群的研究至今影响不衰。É. Cartan 是法国在 19 世纪末到 20 世纪前半叶中不以古典分析为主要专业的数学家，因此对现代数学的发展曾起着极大的推动作用。

Henri Cartan 1904 年 7 月 8 日生于 Nancy。他于 1923 年考入高等师范学校，1926 年毕业，1928 年获得博士学位。1928～1929 年教了一年中学，后任教于 Lille 大学。1931～1935 年他在 Strasbourg 大学任教，1936 年成为该校教授。

20 年代正是单复变函数论在法国红极一时的时期。H. Cartan开始也是从事单复变函数的研究，不过很快他就转向了多复变函数。当时，单复变函数已经成熟，而多复变函数却困难重重。1931～1932 年他证明了全纯域一定是伪



A. Weil(1906～)



J. Dieudonné(1906～)



J. Delsarte(1903～1968)



H. Cartan(1904～)

凸域，这是多复变函数中的一个经典结果。不过，那时的拓扑、分析及代数工具都还不太完备，因此多复变函数论到50年代以后才得到迅速的发展。例如 Cousin(古辛)问题，当时他只得到了一些零散的结果，而 50 年代才真正获得完满的解决。所谓 Cousin 问题 I、II，是对单复变函数论中的 Weierstrass 定理及 Mittag-Leffler 定理在多复变情形的推广。后来由冈洁和 Cartan 用先进的工具分别加以解决。

H. Cartan 在位势理论方面也做出过很大的贡献。Bourbaki 成立之后，他又对拓扑学进行了许多研究，并于 1937 年引进了“滤”、“超滤”等重要概念。

4. Jean Dieudonné

Jean Dieudonné 是 Bourbaki 学派的笔杆子，也是

Bourbaki 学派观点的最积极的宣传者和论战者。他在 Bourbaki 的大会和讨论班上十分活跃，任何时候都不掩盖自己的观点，经常评论当前的数学发展。

Jean Dieudonné 1906 年 7 月 1 日，出生在 Lille。1924 年考入高等师范学校，1927 年毕业，同班的还有著名数学家 Brelot(布雷洛)和 Ehresmann，也都是 Bourbaki 的成员。他先从师于著名函数论专家 Montél 学习函数论，毕业以后不久，就去美国跟随著名的古典分析专家 E. Hille (希尔)做博士论文。E. Hille 给了他一个非常困难的问题，他没有做出来。于是他把问题稍稍加以简化，得出了一般的结果，这使他的论文得到了奖励。而 Hille 原来的那个问题直到现在还没人能够解决，幸好 Dieudonné 当时没有钻那个牛角尖。

一直到 Bourbaki 成立之后，Dieudonné 的研究还没有脱离开多项式根的分布这个极为“古典”的问题。研究这个问题有二个方向，一个是代数方向，也就是 Galois 理论，但是这位后来的代数学家当时具备的代数知识实在是少得可怜，以致 Van der Waerden 的《近世代数学》刚出版时，他才在柏林刚刚知道什么是群。

另一个是解析方向，研究根在复数平面的位置。因为多项式是解析函数的特例，可以用解析函数论的观点研究这个问题。他在 1931 年完成博士论文之后，先后写了十几篇论文及专著，虽然搞古典分析的人还很称道这些结果，可是他本人却认为价值不大，有时连提都不提。

在国外，他亲眼目睹了代数学、拓扑学和泛函分析的巨大发展，才感到自己所走的道路前景黯淡。于是他在 30 岁时开始大转向，后来陆续在代数、拓扑、泛函分析等各方面都做出了巨大贡献。在参加 1935～1936 年的拓扑讨论班时，他引进单位分解的概念，这同他后来引进的“仿紧”等概念，对于以后拓扑学的发展都是很关键的。随后他又在各

个方面开始了一系列新的研究。

5. Claude Chevalley

在讲述 C. Chevalley 之前，须先介绍一下 C. Chevalley 的好朋友 J. Herbrand。J. Herbrand 要是活着肯定也是 Bourbaki 成员，而且也会成为一个毫不逊色的大数学家。当他 1931 年 7 月在 Alps 山遇难时，才只有 23 岁。他年纪虽小，贡献却不少，在数理逻辑和代数数论这两方面都有过上十篇论文，而且受到了当时大数学家的好评。1908 年 2 月 12 日 Herbrand 生于巴黎。1925 年，年仅 17 岁的他就以第一名的成绩考入高等师范学校。1928 年毕业后，又用半年的时间完成了博士论文。此后，他还服了一年兵役。1930 年底，他来到德国，先是在柏林同 von Neumann 一起研究数理逻辑，他在证明论中证明一个基本定理，此定理是后来所有机械化证明的基础。1963 年，有人发现这个重要定理仍有漏洞，后又经过 2～3 年才修补完整。另外，Herbrand 还是最早具有递归函数概念的人。他的早逝不仅使法国失去了一位大数学家，更为重要的是，从此法国(包括 Bourbaki 在内)没有再出现一位数理逻辑方面的专家，这个损失可谓极为严重。

Herbrand 在德国时，对 Noether 及 Artin 的抽象代数及代数数论也发生了兴趣，他同 Noether 等人进行过很多讨论，并与 Weil 及 Chevalley 一起，认真学习、钻研了这个纯粹是德国的数学分支，而且还得出了重要的结果。可是，Herbrand 没能继续他的事业。

Herbrand 的死使他的亲友十分悲痛。他们对他的工作进行了整理出版，其中起主要作用的就是 Chevalley。Chevalley 1909年 2 月 11 日生在南非首府 Johannesburg。1926 年考入高等师范学校。他毕业以后，就去了德国的

Göttingen。E. Noether 1929 年冬天的讲课使他受到了直接的启发。当时，E. Noether 正在研究超复数系（即结合代数）及其与类域论的关系。E. Noether、H. Hasse、R. Brauer 与 Chevalley 经常互相交流，同时也互有影响。这样，Chevalley 开始了他在代数数论方面的工作。结果是 Chevelley 用结合代数的方法表述了类域论，而一方面，也使得前面三位得出了代数理论的主定理。

1932 年，Chevalley 完成了关于类域论的博士论文，此时，他已经在考虑如何除去解析工具，而完全代之以代数工具。1936 年他引进了怪里怪气的 idéle，利用它来达到类域论算术化的目的。在博士论文中，他把类域论推广到有限域及局部域（如 Hensel 发明的 p-adic 域），同时摆脱了 Artin 用的解析方法。他还在 1935 年证明出 Artin 的一个猜想。于是，他逐渐赢得了国际声誉。

1939 年，第二次世界大战还未波及到法国的时候，他就被 Princeton 高等研究院请了去。后来他又在美国的大学任教，过着比较稳定的研究生活。

6. 聚 会

Bourbaki 学派就是由这些青年人开创的。他们出生于 20 世纪的最初几年，在第一次世界大战的年代里，也没有象他们的兄长那样，在帝国主义的火并中充当炮灰。19 世纪的 50 年代、60 年代和 70 年代，法国曾诞生了不少优秀数学家，到 80 年代则已经为数很少，90 年代就近乎绝迹了。高等师范学校的优秀学生们有三分之二是被战争毁掉的。

20 世纪 20 年代，这些百里挑一的天才人物进入万人竞试的高等师范学校。他们没有碰到什么年轻教师，而都是些著名的老头子，基础课就是由他们负责教授。不错，这

些老头们的确很著名，不过他们的知识主要还是他们青年时期的 19 世纪的数学，而对 20 世纪的数学他们认识得相当模糊。

这个时期，德国数学突飞猛进，涌现出了一大批第一流的数学家：E. Noether，C. L. Siegel(西格尔)、E. Artin、H. Hasse、H. Weyl 等等。而法国人还固步自封，对"敌国"的进展不甚了解，对新兴的莫斯科拓扑学派和波兰的拓扑和泛函分析学派就更是一无所知，而对其他象 von Neumann 和 F. Riesz 的工作也不理解，只知道栖居在自己的函数论的小天地中。不过，法国人中也有代表先进潮流的数学家，象 Henri Cartan 的父亲 Elie Cartan，他的思想就超出了同时代人 10～20 年，并且也只能被 Hermann Weyl 这样的大数学家理解。

使得这些青年人大开眼界的是 Hadamard 的讨论班。这个讨论班在法国是独一无二的，被称为"论文分析"。每年年初，Hadamard 把他认为是前一年中最重要的论文分批交给学生，让他们学习后准备在讨论班上做报告。在每星期的讨论班上，总有学生在黑板上就他所学习的论文进行讲解，然后大家提出问题进行讨论。这种新鲜、活泼的教学形式对于青年人的提高大有好处，他们可以了解到当时的一些新的数学进展，以及有不同来历的各类数学家。很快它也吸引了许多外国人参加，这就大大增加了数学家之间的交流，使他们扩大了眼界，提高了认识。而这些在正式课程中是根本无法学到的。

这些青年人毕业以后，一般都到国外学习过一段时间。亲身的经历使他们深刻认识到了同世界先进水平的差距。他们痛切地感觉到，如果沿着现在这些老头们搞的方向继续下去，势必要把法国的数学带进死胡同。当然，法国数学家在函数论方面仍然可以保持领先地位（实际上，在单复变函数论的一个主要方面已被外国数学家超出：1925 年，

芬兰数学家 Rolf Nevanlinna 获得了最重要的成果，后来在 1929 年芬兰的青年数学家 Ahlfors 又取得了突出成就，证明了法国数学家 Denjoy 的猜想)。但是，在数学的其他方面，人们已经快要忘掉法国数学家了。此时，法国 200 年来的伟大数学传统正濒于丧失。恰恰是这些有远见的青年人，在法国科学全面落后的情况下，使法国数学在第二次世界大战之后又能保持先进水平，而且影响着整个现代数学的发展。

到了 30 年代，这些青年数学家大都已经各自得出了出色的结果。但是，他们仍然是一些无名小辈。他们先后在法国的大学里找到了教书的职位。H. Cartan 于 1931 年，A. Weil 于 1933 年到 Strasbourg 大学任教，而 Delsarte、Dieudonné 等人在 Nancy。他们之间保持经常的接触及交往，定期到这个城市或那个城市会面，形成了法国数学的“东部集团”。开始他们对于老的教本、当时通用的 Goursat(古尔萨)的《分析教程》很不满意。这本书出版已经三十多年了，内容非常陈腐，他们在教学过程中发现了一系列问题，比如说应该如何讲授 Stokes (斯托克斯)定理。开始，只是 Delsarte 同 Weil 在一起研究，后来大家逐渐都产生了一种组织起来改革教学的愿望。

就在这时，G. Julia 取代了 Hadamard 成为讨论班的主持人。他用的方法又别具一格，即每学年讨论班只集中研究一个课题，而且是比较“现代化”的。1933～1934 年的课题是“群和代数的代数及算术理论”，这在当时是 E. Noether 学派的最新研究成果；1934～1935 年是“Hilbert 空间及其应用”；1935～1936 年是“拓扑学”；1936～1937 年是“E. Cartan 的微分几何学”。这些都是当时最时髦而在法国却很少为人所知的新数学。

在 G. Julia 的保护之下，他们组织了起来，并借每月两次到巴黎活动的机会，大家凑在一起讨论改革问题。最



C. Chevalley(1909～)　　J. Herbrand(1908～1931)

初，他们是在一家饭馆内边吃边谈，决定一起来编写一本教科书，它既能够和 Goursat 的教程有同等的重要性，而且又可以满足 20 世纪现代数学发展的需要。

这样，在 1935 年，大约 10 个左右的青年人，以 A. Weil、Delsarte、H. Cartan、Dieudonné 和 Chevalley 5 个人为核心，开始着手进行这项目标有限的计划。他们每个月在巴黎的一家饭馆聚会，进行一次集体讨论。但是他们很快就感到，不可能只局限于编著一本分析教科书。当时的代数学由于 E. Noether 学派的工作已经改变了整个数学的面貌，数学分析的基础也完全发生了变化。如果对整个现代数学的发展不能全面掌握的话，这个任务就很难较好地完成。

于是，他们决心扩大目标，要以书的形式来概括现代数学的主要思想，而这也正是 Bourbaki 学派及其主要著作《数学原理》产生的起源。这时 Bourbaki 的大多数成员还

不到 30 岁，年纪稍大些的也不过才 30 出头。初生牛犊不怕虎，此话的确不假。如果他们的年纪再大一些，知识再丰富一些，经验更多一些，这项伟大的事业也许就永远不会开始了。在讨论这个方案的第一次会议上，他们准备在 3 年之内就完成这部大著作，以为这样便可以得到一张数学基本原理的蓝图。

Bourbaki 的成员以高度的热情开始进行工作。可是 20 世纪的数学已经发展到这样一个程度，即每一位数学家都必须专业化。也许只有少数象 Poincaré 和 Hilbert 这样的大数学家才能掌握整个数学。而对于普通的数学家，要想对整个领域有一个全面的认识，并能抓住各个分支的内在关系，那是非常困难的。为了达到原来的目标——对数学所有分支中的基本概念加以阐明，然后在此基础上再集中于专门学科，每位成员必须从一开始就忘掉自己的专业。不仅如此，他们还发现，几乎所有的东西都要从头学起，而且作为一个整体，他们必须对每一个问题都加以讨论，每个人都要提出自己的意见，再与别人的看法进行比较和探讨。

1935 年底，Bourbaki 的成员们一致同意以数学结构作为分类数学理论的基本原则。"数学结构"的观念是 Bourbaki 学派的一大重要发明。他们认为，在数学世界的中心，可以发现结构的几种类型：这就是代数结构、拓扑结构、序结构。这些结构经过混合和杂交，可以得到数学的各种研究对象。比如实数就是这 3 种结构有机结合在一起的结果，而 Lie 群是特殊的拓扑群，是拓扑结构和群结构相互结合而成。因此，数学的分类不再象过去那样划分成代数、数论、几何、分析等部门，而是依据结构的相同与否来分类。比如线性代数和初等几何研究的是同样一种结构，也就是它们"同构"，可以一起处理。这样，他们从一开始就打乱了经典数学世界的秩序，以全新的结构观点来统一整个数学。

同时，他们宣布，他们使用的方法是公理化方法。这种方法是 Hilbert 在《几何基础》中所阐述过的，它不同于经典的 Euclid 几何学。具体说，每种结构通过公理本身来定义，然后由完备的公理系统推导出整个形式系统，也就是某个数学理论或数学分支。并且，由公理的多少和蕴含关系就可以阐明理论之间的关系。这样一来，整个数学就成为大大小小相互关联的形式体系的统一体，成为一个井然有序的王国。

因此，Bourbaki 的《数学原理》是按照集合论、代数（代数结构）、一般拓扑（拓扑结构）的顺序一步一步写出来的。当时，Van der Waerden 的《近世代数学》刚出版不久（第一卷 1930 年出版，第二卷 1931 年出版），这本书不仅概括了 E. Noether 和 Artin 的讲义及许多新的研究成果，而且在写作上也有独到之处。它用非常确切的语言，对思想的发展组织得极为紧凑，而且全书的不同部分构成了一个有机的整体。这对 Bourbaki 的成员来说，似乎应该是值得仿效的标本。但是，Bourbaki 并不是另外一个 Van der Waerden，两者之间有着很大不同。

首先，他们必须消化大量从未有人整理过的材料，比如多线性代数一章所阐述的外代数，就要参考 1844 年出版的极为晦涩的 Grassmann（格拉斯曼）的原著。又如一般拓扑学的结果，也只能在少数论文及 Fréchet 写得很乱的书中找到。在全面占有材料的基础上，他们要把结构的观点贯穿在其中。如果某人写得同以前的其它著作大同小异，那就要被 Bourbaki 大会所“否决”，由别的人重新起草。

其次，书中的许多新概念需要创造出来。比如，1936年 A. Weil 推广拓扑空间的概念而得出的一致性结构概念，就是在起草一般拓扑学的时候创造的。H. Cartan 在 1937 年引进的“滤”的概念，也被纳入一般拓扑学中。这些概念都体现出 Bourbaki 希望以最少的公理来反映最多的内容

这样一种思想，而且它们还在以后的许多数学分支中有着广泛的应用。

再有，《数学原理》虽是集体的产物，却有着统一的风格。他们每年都召开讨论《数学原理》的集会。在集会上，决定写某一部分，其分多少章，每一章论述什么专题等。然后，再把起草的任务交给某个想要担当此任的人。于是，这个人就可以开始进行初稿的“创作”。在写作材料的选择上，他尽可以随心所欲。一二年之后，“作品”需提交Bourbaki 大会审查。在会上，作者必须一字不漏地大声宣读。每一个证明都要进行严格地检查，并且经常会受到无情的批评。初稿往往被批得体无完肤，于是便找出另外一位成员，让他一切再从头开始。这位新作者也不知道下次大会将发生什么情况，即使他按照新的精神去干，大会的思想活动也在改变，到下一年说不定原稿仍然会被扯得粉碎。然后第三个人又重新开始。就这样，一次次的接力下去，当进行到第六、第七、甚至第十遍时，大家终于都有点受不了了，于是一致通过把它付印。从最后的定稿很难看出哪一部分是谁写的，此项工作的的确确是集体共同创造的。可是这又带来了实际问题：一本书通常以其作者的名义出版，那么是否在每一卷的扉页上都要印上长长的作者名单呢？最后，由集体决定，用一个假名出版：Nicolas Bourbaki。

就这样，经过 3 年的含辛茹苦，他们只完成了《数学原理》第一部分“分析的基本结构”的第一卷“集合论”中的一个分册——“结果”。这本还不到 50 页的小册子在 1939 年问世。书刚刚出版，欧洲已经战云密布，第二次世界大战即将爆发，Bourbaki 的成员开始各奔东西了。

第六章　第二次世界大战前后

第二次世界大战不仅使整个世界形势发生了巨变，而且对数学的发展和各国数学实力的相对改变也产生了极大的影响。

1．德国数学的衰落

1933年希特勒上台，德国科学从此开始走下坡路，而数学尤为突出，以致在50年后的今天还没能够恢复到昔日Göttingen那样光辉灿烂的年代。

纳粹上台还不到几个月，法西斯改革便已经立竿见影。犹太血统以及反对纳粹的教授、讲师被纷纷解聘。没有几年，大学的学生减少了一半，教师减少了四分之一。而且，大学逐渐被一些冲锋队员所把持。Rust（卢斯特）这个冲锋队大队长，当上了教育部长，他的确实现了自己的豪言壮语："使学校不再成为一个玩弄学术的机构"。

此时，曾是一代数学家圣地的Göttingen，著名的教授、讲师已所剩无几。数论专家Landau(朗道)被禁止上课；大数学家Hermann Weyl去了美国Princeton新建的高等研究院，随后，Einstein和von Neumann也去了那里；Richard Courant到了纽约，后来仿照Göttingen的研究所建立了著名的Courant研究所；Emmy Noether也到了美国，但不久就死于手术台上；Neugebauer(诺格包尔)只当了一天的研究所所长就被轰下了台，他先去丹麦惨淡经营过著名的文摘杂志《Zentratblatt》，后来到了美国，协助出版新兴的《数学评论》。

与此同时，Emil Artin、Carl Ludwig Siegel 等一些最著名的数学家也都陆续离开了德国而赴美。

无怪乎德国的数学元气大伤。Rust有一次问 Hilbert，现在 Göttingen 的数学怎么样？Hilbert 不无好气地回答他："什么，我不知道 Göttingen 还有什么数学！"

不错，Hilbert、Noether 等人的数学道路越走越窄，而"德意志数学"却鼓噪一时。1936 年，德国创办一种新刊物《德意志数学》，第一卷的扉页上就是元首的语录。其中某篇评论宣称：凡是认为数学没有种族性的想法，其本身就包含"毁灭德国科学的胚种"。

当时，物理学界臭名昭著的 Lenard（勒纳德）、Stark（斯塔克）之流标榜"亚利安物理学"，反对 Einstein 的"犹太物理学"。数学界中也有一批人大谈"种族与数学"，其中最起劲的就是 Ludwig Bieberbach（毕勃巴赫）。1934 年春，他在柏林工业学院发表了题为"个性结构与数学创造"的演说，其中他证明"血缘及种族的'教导'也能应用于数学界"，他要把这门最抽象的科学也置于整个国家之下。后来，他又在《柏林科学院纪事》上发表了题为"数学创造的类型"的文章。Bieberbach 的出发点就是法西斯学生在 1933 年秋天阻止 E. Landau 上课时所用的口号："亚利安的学生要亚利安的数学，不要犹太数学。"Bieberbach 无耻叫嚣的"理论"根据，完全是 Marburg 的纳粹心理学家 E. R. Jaensch（雅恩施）的种族类型理论。

然而，L. Bieberbach 对数学确有不少贡献，他在函数论及 Hilbert 第 18 问题等方面都作出过杰出的成就。所以，他的言论自然会引起国内外的关注。著名的丹麦数学家 Harald Bohr、美国数学家 Oswald Veblen（范布仑，几何拓扑学家，美国数学界的领袖人物之一）、英国数学家 G. H. Hardy（哈代，数论及分析家）等人纷纷公开谴责 L. Bieberbach 的这种论调，于是引起了一系列的论战。

德国老一代数学家的相继去世及退休，许多著名的中年数学家被迫移居国外，以及很多学者在国内横遭迫害，使得青年一代的数学家在法西斯体制的压抑下没有得到很好的培养，因此德国数学也就出现了一蹶不振的局面。

当然，德国伟大的数学传统并不是一下中断的。留在德国本土的数学家大致有四种类型：

(1) 被纳粹政权关进了集中营甚至迫害致死。在 Hilbert 的指导下第一个拿到博士学位的学生 Blumenthal(布鲁门塔尔)，也是 Hilbert 全集中 Hilbert 传记的作者，他长期同 Hilbert 交往，经常到 Göttingen 来。希特勒掌权后，他逃往荷兰，后来被捕，1944 年死在捷克的集中营里。

著名的拓扑空间理论奠基人之一 Hausdorff，自 1921 年起一直在 Bonn 任教，一直到 1935 年被纳粹赶下讲台。但他并没有离开德国。1941 年，当听说法西斯也不放过他这 74 岁的老头，准备把他们关进集中营时，他们夫妇便在 1942 年初双双自杀了。

Göttingen 的教授 Landau 是著名的数论专家，从一开始他就是纳粹学生的攻击目标。因为他是许多国家的科学院国外院士，所以一些人曾邀请他出国，不过他愿意留在德国。后于 1938 年去世。

(2) 埋头于学问，不过问政治，在艰苦的条件下仍然取得了一些成就。这些数学家继承了以前的传统，但是没有能造成过去那种生动活泼、集体讨论的气氛，而且，获得的成果也无法与旧日的辉煌业绩相比。然而，他们中间也有成就突出者，如 Ernst Witt(维特)在二次型和李代数的工作很出色；E. Noether 的学生 Krull 对交换环尤其是局部环所做的开创性工作，在后来的代数几何学上有着重大影响；Max Deuring(道凌)1935 年写了一本《代数学》，简明地介绍了 E. Noether 的理论。

另外，Van der Waerden 曾在 Leipzig 任教一段时期，战后回到荷兰，不久又去了瑞士，他在代数几何学基础方面做过一些工作，后来转而研究古代数学史。

(3) 依附纳粹。1934 年著名数学家 Hasse 成为 Göttingen 大学教授兼数学研究所所长。他对纳粹的态度在数学界有一定的代表性。

Helmut Hasse 生于 1898 年，年纪轻轻就表现出具有杰出的数学才能。1920 年他在 Göttingen 大学就读时，在旧书店发现了一本 Kurt Hensel 所写的《数论》，其中已经引进了 p-adic 数。p-adic 数在现代数学中极为重要，但是，在当时没有受到多大注意，特别是 Göttingen 大学的诸公不大看得起这位小地方犹太人的独立创造。刚刚二十多岁的 Hasse 马上看出 p-adic 数同通常的实数有着许多共同点，而在二次型的研究中，它们同实数处于平起平坐的地位，这些"局部域"的结果加在一起，可以得出"全局域"(例如有理数域和代数数域)的结果，这就是现在所谓的 Hasse 原理，也是他在 1921 年博士论文中得到的杰出结果。后来，事隔很久之后，他才表示出上述想法的来源是归诸于 Hensel，并承认受他的影响最大。不过，在法西斯统治时期，当 Hensel 1941 年去世时，Hasse 一声都没吭。不仅如此，就连对他影响很大的另一位大数学家 Emmy Noether 的去世(1935 年)，他也一个字没有写，倒是在 Leipzig 的 Van der Waerden 写了唯一的德文纪念文章。

Hasse 在 20 年代中期，不由自主地受到了抽象代数的影响，他同 Noether、Artin 的来往很多，并合写过重要文章。他还在抽象代数以及代数数论(特别是类域论)方面做出了极为杰出的贡献。

1933 年希特勒上台之后，犹太教授纷纷被解职。这时，不能说 Hasse 对他们一点忙没帮过。当然，一些正直的德国科学家出于发展学术的考虑向纳粹政府请愿申诉，是不

会产生任何效果的。1934 年，Hasse 在 Göttingen 就职，E. Noether 对他抱有很大期望，希望他能继续保持德国光荣的数学传统。当时，Hasse 同犹太籍数学家还有联系（E. Noether 临终前最后一封信就是写给他的），这使法西斯当局和纳粹学生对他很为不满。1934 年夏天，Teichmüller 等人为首的学生以示威反对 Hasse 来到 Göttingen。同年秋天，在德国数学联合会召开的会议上，Hasse 和大多数德国数学家站在一起，反对 L. Bieberbach 和 Tornier（多尼埃）之流把"元首原则"引进德国数学界。

然而好景不长，Hasse 的立场很快就转变了。他 1937 年加入了纳粹，1940 年去柏林海军研究所从事军事研究工作，一直到 1945 年才回到 Göttingen。虽然这里存在有法西斯威逼利诱的客观原因，但实际上还是他本人的思想起着主要的作用。据他后来讲，自己是一个狂热的民族主义者，对于俾斯麦在 1871 年建立的第二帝国尤为崇敬。第一次世界大战战败之后，屈辱的 Versailles 条约使他的心灵深受创伤。为此，他衷心地赞同希特勒为纠正这种不公正而作的种种努力。他不愿看到德国被踩在其它国家的脚下，而希特勒的作法符合了他的愿望。于是，保守的民族主义思想最终使 Hasse 和其他一些上层人物拜倒在希特勒的脚下，成了法西斯的走卒。

（4）法西斯分子。一个是著名数学家 Bieberbach。他从 1934 年起就发表文章论述种族与数学的关系，主张把"元首原则"搬到数学界来。这样，他所在的柏林大学便成为亲纳粹的数学中心，他还根据法西斯的种族理论和政治原则来选拔数学家。

另一位是青年数学家 Teichmüller（台什缪勒）。无疑，他颇具数学才能，但这并没有妨碍他成为一个狂热的法西斯分子。他在上学时，就常和纳粹学生一起起哄，阻拦 Landau 上课。他还作为"造反"学生的代表同犹太教授"谈判"，

不准他们"乱说乱动"。

起先，他醉心于抽象代数，后来研究 Riemann 曲面的参模。1937 年，他曾独立得出拟保角映射的概念，但很快他就知道了 H. Grötzsche (格罗米)早在 1928 年就发展出了这个观念。1939 年他发表了一篇长达近 200 页的论文，题为"极值拟保角映射与二次微分"。其中，他证明了极重要的定理，并使得这两个概念有了联系，从而奠定了所谓 Teichmüller 空间理论的基础。他的工作更清楚地表明了拟保角映射在整个几何函数论中所起的重要作用，同时预示了后来高维拟保角映射的发展。事实上，整个单复变函数论就是由于引进了拟保角映射的观念才得到了极大的丰富，而且大部分都是源于 Teichmüller 的原始思想。但是，Teichmüller 的写作风格极不正规，论文中的证明和直观推理混在一起，很难看出他那拖泥带水的证明是不是真正完成了。由于他的重要文章正好发表于二次大战的时期，并且经常是刊载在诸如《德意志数学》这类国外不易见到的刊物上，因此他在国外不太为人所知。

第二次世界大战之后，Ahlfors 等人开始研究 Riemann 面等重要问题，他们发现了 Teichmüller 的结果，补正了他的证明，这才看出他的工作对后来发展的深刻意义。但是，他们对 Teichmüller 本人却仍然所知甚少，只晓得他 1913 年 6 月 14 日生于 Nordhausen，1943 年在东线失踪，显然成了纳粹的牺牲品。后来，有人想搜集他没有发表的手稿，不过没有成功，所以只得把他生前发表的 34 篇论文编辑成《Oswald Teichmüller 全集》，并于 1982 年出版。

在 1939 年之前，留在德国本土的数学家多少还做了一些工作。第二次世界大战开始后，许多数学家被迫转向与军事应用有关的工作，例如，著名代数学家 W. Krull 从 1943 年起就替海军搞气象预报，一直到德国战败。

1943 年以后，德国数学杂志的篇幅大量压缩，有的甚

至几年只出一卷，就连《德意志数学》到 1943 年也停了刊。

战败后的德国，许多城市已成为一片废墟，物资的缺乏使很多人在受冻挨饿。1946～1947 年，冬天极为寒冷，许多大学里没有煤生火，留下来的教授们在非常困难的情况下逐渐恢复了上课。1948～1949 年，新的教学和研究秩序才恢复正常。进入 50 年代后，一批青年数学家成长起来，例如 F. Hirzebruch（赫采布鲁赫）（他对于代数簇的 Riemann-Roch 定理的推广是众所周知的）、Grauert（格劳尔特）、Remmert（雷默尔特）（他们是新一代多复变函数论专家），不过他们大都受到过 Bourbaki 学派成员的影响。



Ehresmann(1905～1979)



L. Schwartz(1915～)

2. Bourbaki 在美国

André Weil 1941 年 3 月抵达纽约，不久就到了 Princeton。在那里，他又和朋友 Chevalley 重聚一堂，还遇到

了刚从德国来的 Siegel。这时，Bourbaki 的《数学原理》第一册出版不久，而 Weil 的名著《拓扑群上的积分及其应用》也刚刚问世，这本书完全体现了 Bourbaki 观点。

Bourbaki 成员力图把整个数学建立在集合论的基础上，尽管这一开始就遭到了许多人的反对。他们特别援引概率论、微分几何学、代数几何学为例，这些学科各有自己的基础，但其中总插进许多神秘的直观。特别是意大利的代数几何学家，他们有许多重要发现，但是对于不是那个圈子里的人，连那些名词都很难理解。几十年上百年形成的代数几何学，它那大大小小的众多成果，能不能在抽象代数和拓扑的基础上构成一座严整的数学大厦，这一问题就成了 Bourbaki 观点的试金石。André Weil 正是在此时投入这项工作的。

在 40 年代，Weil 曾花了大量时间思考这个问题。过去的代数簇是复数域上由多项式所定义的零点集合，Descartes(笛卡儿) 的坐标几何学发展以后一直是这么看的。能否不用坐标，内蕴地定义"代数簇"，是 Weil 首先想解决的问题。他说，为此他经常同 Chevalley 讨论，并很快得到了解决。其次是交截理论。两个代数簇的交集性状如何，这不仅在理论上十分重要，而且有着广泛的实际应用价值。它长时间以来并没有严格的基础，由过去的代数几何学中公式得出的许许多多相交数目是否靠得住只有天晓得。Van der Waerden 曾尝试建立交截理论的基础，但真正严格的基础是 Weil 建立的。他的理论不仅对于复数域适用，而且对于任意特征 p 的代数闭域也对。这个严整的代数几何学体系就是他在 1946 年出版的《代数几何学基础》一书。现在，这本书已成为一部经典著作。后来 Bourbaki 学派的 Serre、Grothendieck 等其他成员对代数几何学的进一步发展，就是建立在这本书的基础之上的。

一个有着严整基础的理论，如果不能解决实际问题，数

学家是不会买你的帐的。而 Weil 的代数几何学的确可以硬碰硬地解决数学中的难题，特别是数论中的问题。对有些数论问题，复杂的解析工具无能为力，但是，代数几何学却能够得出漂亮的结果。最突出的例子就是 Riemann 猜想。Weil 很想证明原来的 Riemann 猜想，即 $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ 的零点都在复平面的实部为$\frac{1}{2}$的轴上。但是这个问题极难，至今尚未解决。不过，对于任意有限域上的代数簇，都能定义相应的 ζ 函数，也都有相应的 Riemann 猜想。1933 年，Hasse 首先证明了椭圆曲线的 Riemann 猜想。而Weil 在 40 年代得到了对于所有曲线的证明。在这个基础上，他于 1948 年提出了 Weil 猜想。1973 年，Deligne(德林)完全证明了他这个猜想，而且证明中所用的数学工具大都是 Bourbaki 学派成员的创造结果。这个证明极大地丰富了现代数学。同时，由此所派生出来的一些结果，象对数论中三角和的许多估计，都是其它方法根本无法办到的。当代数几何学得到这个 70 年代最重要的成果时，用初等解析方法刚刚能够得到 Weil 当时的结果。从这里可以看出 Weil 思想的深刻和它的威力。

第二次世界大战期间，Weil 并不太走运。作为一个犹太后裔，他总算逃脱了希特勒的集中营。不过，他在数学上取得成就并且跻身于大数学家的行列之中，直到战后才得到公认。因此，他在战时为生活所迫，不得不干一些挣钱糊口的事。在 Princeton 没呆多久，他就去 Haverford 学院任教。后来他说这是一个“连提都没法提的事”。他的履历表里也隐瞒了这段经历。其实，他无非是要花许多时间去教当时程度极低的美国大学生，虽说名义上是教“微积分”，实际上却还要教三角和初等几何，大概还要改作业本呢。在对自己全集的评注中，他也曾抱怨当时的研究工作进度很慢，这只能说是有点倒霉罢了。

在 Haverford 学院任教时，他与同事 Allendorfer 把曲面的 Gauss-Bonnet 公式推广到任意维的 Riemann 流形上。这个定理十分重要，它是现代微分几何学的出发点。但是，这个定理依赖于当时还不知道是否存在的嵌入，因此，证明不是"内蕴的"。

1943 年，陈省身由昆明几经周折来到美国。他看到了这篇文章，并得出内蕴的证明。1944 年，他将结果发表在美国数学会会志上。Weil 非常赞赏陈省身的工作，说它"开辟了微分几何学的新纪元"。

1944 年底，Weil 离开美国去巴西 São Paulo 大学任教授，直到 1947 年秋才回到美国。他觉得在巴西的这段时期，无论从哪方面讲都是最使他难以忘怀的。在那里，他同另一位代数几何学家 Zariski 经常在一起交谈，并在 1945 年完成了代数几何学的两本著作(在 1948 年发表)。1946～1947 年，Dieudonné 也来到巴西，两个人共享了一段美好时光。有意思的是，在 São Paulo 期间，他和后来哲学上结构主义的代表人物 Lévi-Strauss (列维·斯特劳斯)是同事，他从数学上对于人类学的问题进行了研究。当结构主义在 60 年代成为哲学上的热门之前，以 Weil 等人为代表的 Bourbaki 的数学结构主义已经在数学界红极一时了。

Bourbaki 学派另一位居留美国的成员是 Chevalley。Chevalley 年轻时就已经出了名，他对类域论的算术化使得许多数学家赞叹不已。二次大战期间，他一直在 Princeton，生活上颇为安定。他于 1940 年完成了类域论的算术化之后，开始研究代数函数论及李群理论。他还继承了 Noether 及 Krull 的工作，对于局部环也得到系统的结果。

3. 法国本土的 Bourbaki

1940 年 6 月 14 日德国攻占了巴黎，法国不战而降。法

国北部成为德国占领区，南部是以贝当为首的亲德伪政权。Alsace 和 Lorrain 重新又陷入德国人手里，Weil 和 Cartan 曾任教过的 Strasbourg 也成了德国人的学校。原来的法国师生从德占区各地移居到法国中部的 Clermont-Ferrand。从 1940～1943 年，这里集中了许多 Bourbaki成员，其中有老的也有新的。象 H. Cartan、J. Dieudonné、Ehresmann、J. Delsarte、以及 A. Lichnerowicz(李希涅洛维奇)和 L. Schwartz 等人。这里的学术活动并未中断，而且还通过各种途径同大西洋彼岸的 Bourbaki 成员建立了联系。据说，Bourbaki 的某些书稿还是由戴高乐抵抗运动的地下组织负责传递的。

Bourbaki 战前完成的书稿在 1939 年首次出版《《集合论总结》》，又于 1940 年出版《一般拓扑学》的第一、第二章(拓扑结构)，1942 年出版第三、第四章及《代数学》的第一章(代数结构)。这四本书已经反映出 Bourbaki精神，而且是《数学原理》的基础。它与其它著作完全不同。不过这时正值大战，这些书并没有受到足够的注意。而真正的出版热潮是在二次大战之后的十多年。

留在法国的数学家进行了许多创造性的工作，也为 Bourbaki 后来产生的巨大影响打下了基础。

H. Cartan 在大战期间主要从事位势理论的研究。他系统应用了“能量”的概念，证明出有限能量的正分布空间是完备的定理。这个定理后来促使 J. Deny (德尼)在位势理论中引进 Schwartz 的广义函数论，并且推广了上述定理。而且，H. Cartan 还引进了“精细拓扑”的概念，这对解决位势论公理化及与概率论的关系等问题都起着重要的作用。另外，他证明了古典位势论的若干重要定理，并且首先在齐性空间上引进了位势理论。

J. Dieudonné 在战前只研究单复变函数，而在战时和战后却对于拓扑学、泛函分析、典型群等许多问题的发展作

出了重大贡献。他引进的“仿紧空间”是现代拓扑学中必不可少的概念。他还在1942年首次把 Banach 空间的对偶性质推广到一般拓扑向量空间，从而为后来 L. Schwartz 的广义函数打下了基础。

在 Van der Waerden的《近世代数》出版时，Dieudonné 觉得自己的代数学知识简直少得可怜。三十年代中期起，他积极钻研代数学和拓扑学，并在战时开始系统地研究典型群，并在战后给出了完整的论述。

C. Ehresmann 生于1905生，他是 E. Cartan 的学生。他1934年所作的毕业论文是关于 Grassmann 流形的同调计算的，这对后来示性类的发展有很大影响。后来，他又引进了许多重要的数学概念，特别是纤维丛与纤维空间，这是拓扑学及微分几何学中的一个极其重要的观念，也是一个常用的有力工具。他还引进了叶状结构的概念，实际上就是流形上的偏微分方程理论，目前这个理论已获得了极大的发展。另外，他在大范围分析中引进导网(jet)的概念，他自己说这是由于看到了办公楼前的喷水池而受到了启发。他引进的概复结构是几何中十分重要的结构，后来被推广成一般的G结构。Ehresmann 原本很富于几何直观想象力，可是极端的 Bourbaki 主义思想，导致他后来专门从事范畴理论的研究，去搞一些玄不可言的东西，从而在某种意义上脱离开了活生生的数学内容。

4. Laurent Schwartz

L. Schwartz 以广义函数（分布）论的创立者而知名。他是第二代的 Bourbaki 的代表人物，也是在战时受 Bourbaki 成员的影响而成长起来的著名数学家。他是荣获 Fields 奖的头一位 Bourbaki 成员。

L. Schwartz 1915年3月5日生于巴黎。在中学时

期，他先是热衷于学习拉丁文和希腊文，后来才对几何学和分析学等数学科目发生了兴趣，而且同时还喜爱物理学、化学和生物学。因此，这就决定了他不是一个死钻牛角尖的数学家。他很早就暗自下定了决心，要把他所知道的数学理论构成一个融会贯通的体系。他之所以要这样做，一方面是为了追求一种数学上的美，另一方面是想创造出一些有实用价值的数学工具。他这些想法恰巧与老一辈 Bourbaki成员的打算不谋而合。而且也预示了他个人后来的数学成就。

1934 年他进入高等师范学校，学习当时法国最为时髦的分析理论，象 Lebesque 积分、单复变函数、偏微分方程、微分几何等课程。当时，泛函分析已经成为一门独立的学科，J. Leray 在法兰西学院开了这门课，而且他还在进行泛函分析方面工作的同时，开始改变过去古典分析的一些作法，这给 L. Schwartz 留下了深刻的印象。

也正是在这个时候，L. Schwartz 碰到了他未来的岳父 P. Lévy(列维)。P. Lévy 是一位伟大的数学家，但是用 Schwartz的话说，他应该算是自修出身，就是说他不象其他法国数学家那样受过正规的训练。走过正规的学术道路。而且，他所研究的数学课题也远远偏离当时的函数论。开始他主要是研究泛函分析，后来转而研究概率论，并成为现代概率论的主要奠基人之一。当时，他正在积极从事随机过程的研究。在 Lévy 的影响下，Schwartz 写出了他的第一篇论文，内容是关于概率论方面的。他于 1941 年发表的第二、第三篇论文仍然是这方面工作的继续。尽管他后来受到了 Bourbaki 的影响而转向其他方面的研究，Lévy 的影响在他后来的工作仍然不时可以见到。

在 3 年的大学生活中，他反复考虑过一些特殊的病态函数。Dirac(狄拉克)著名的 δ 函数就是一例。δ 函数在量子力学中是经常碰到的，可是从数学上讲却毫无意义。它的

表述是这样的：在 0 处取值∞，在非零处取值 0，而且积分等于 1。数学家不承认它是函数，可是它确实有用。Schwartz 曾多次想把它纳入正规的数学理论，可是用他学过的老式理论是达不到这个目的的。

1937 年，他从高等师范学校毕业，取得了教师资格。这时欧洲正处于“山雨欲来风满楼”的紧张局势之中。希特勒正在叫嚷战争，法国人为准备应战，将年轻人都拉去服兵役。1937～1940 年，Schwartz 在兵营里度过了三载时光，当他退役时，法国一枪未发就已将巴黎拱手交给了德国人。

1940 年 6 月，由于希特勒德国的长驱直入，法国的一些大学跟着政府纷纷南迁。这时，Bourbaki 许多成员的所在地 Strasbourg 也落入了德国人的手中。于是，有很多 Bourbaki 成员先后跑到德国中部的 Clermont-Ferrant 去避难，他们是：J. Dieudonné、H. Cartan、A. Weil、J. Delsarte、C. Ehresmann、J. Possel、S. Mandelbrojt（曼德尔布洛伊）、A. Lichnerowicz 等人，简直可以说是一次 Bourbaki 的大集中。这时 L. Schwartz 来到 Clermont-Ferrant，这个地方是贝当伪政府的管辖区，与德军直接控制的巴黎相比，多少有所不同。

当时，法国国家科学研究中心成立不久，L. Schwartz 在这个研究机构中担任助手。开始写博士论文。博士论文是关于指数和的，但是他采用了泛函分析方法来解决这种经典逼近问题。这一课题的构思是来源于 J. Dieudonné 所讲的泛函分析课，他使用的方法则得自同 Bourbaki 诸公的接触。经常与 Bourbaki 成员在一起，使得 Schwartz 不但接受了许多过去古典分析中根本没有的新概念，大大开阔了他的眼界，而且使他懂得了代数学、拓扑学、泛函分析这些“新玩意儿”，而这些正是他在日后的研究中所需要的工具。当然，他学习代数学及拓扑学不是为抽象而抽象，而是为了它们在分析上的应用。

1943年他取得了博士学位。1944年起到Grenoble当讲师。1945年以后，他转到Bourbaki的中心Nancy，后来升为教授。

在战争即将结束时，他已经得出了一般泛函空间中对偶性的完整理论，因为当时他觉得这个理论的用处不大，所以没有马上发表。后来他才发现，这个理论可以被看作是广义函数论的入门钥匙。

早在Galileo(伽利略)时代，变量这一概念就开始被引入数学之中。变量间相互依存的关系称为函数。随着变量数学特别是分析数学的发展，函数的概念也不断地发展变化。正如数的概念在不断变化发展一样，这完全出于数学自身发展的需要。17世纪时微积分的发展，伴随有许多初等函数的研究；18世纪特别是19世纪偏微分方程的发展，出现了许多特殊函数，这就要求应该有一般的函数概念。对一般函数的研究又导致了许多前所未有的病态函数的出现，特别是不可微的函数。

Dieudonné曾说过，Schwartz对广义函数论所起的作用正如Newton(牛顿)和Leibniz(莱布尼兹)在微积分上的贡献一样。其实，并不象一般人所认为的那样是Newton和Leibniz"发明"了微积分，早在他们还是小学生时，许多人就已经在使用微积分方法了。而他们的贡献在于把微积分的概念和算法系统化，使之成为我们现在非常熟悉的一种强有力的用途广泛的工具，而在他们之前，数学家只能通过复杂的论证及图形来使用这种方法。

广义函数论也不能说是L. Schwartz发明的。他只是坚持不懈地把前人的思想铸造成一种统一和完全的理论，并且加进了许多新的定义及结果（特别象张量积和广义函数的卷积等重要概念）。在广义函数论体系形成之后，他和他的学生继续不断地发掘广义函数论的潜在威力，一步一步地使所有分析数学家相信，这些新概念在分析中，特别是

在线性分析中处于中心地位。而一运用上这一理论体系又具有非常大的自由性和普遍性，相比之下，古典分析却总是受到许多不必要的限制，并呈现出各种各样的病态。

1945 年，他独立地发现了 S. B. Sobolev（索保列夫）的广义函数，而且能够令人满意地把 Fourier 变换推广到这一函数上面。

战后，他又找到了刻划广义函数所需要的泛函工具，从而使他在 1950～1951 年出版了划时代的著作《分布论》。由于在这方面的伟大功绩，他荣获了 1950 年的 Fields 奖。

第七章 全盛时期

第二次世界大战结束之后，西欧慢慢从战争的废墟中开始重建。在那个艰苦的时期，没有吃的，没有烧的，没有用的，要恢复到正常的教学和科研秩序更是谈何容易，甚至连讨论班的讲义还要 H. Cartan 等教授自己打印。尽管如此，大西洋两岸的 Bourbaki 成员仍在积极活动，为开创一个新的历史时期而加倍努力地工作。

美国在第二次世界大战中得天独厚。由于收留了欧洲的一些著名数学家，使美国的数学得以飞速发展，从而使美国成为战后的数学大国。当时 C. Chevalley 在纽约 Columbia 大学任教，后于 1953 年去过日本，并给日本数学以新的刺激。A. Weil 在 1945～1947 年间来到巴西，在那里他先后同 Zariski 和 Dieudonné 交往，过了一段十分愉快的生活，1947 年后又回到美国任 Chicago 大学教授，1958 年到 Princeton 任高等研究院教授。他们都不时地回巴黎去看看。1952 年以后，Dieudonné 在美国也呆了很长一段时期。与他们隔洋相望，H. Cartan 和 Delsarte 一直留在法国，Ehresmann 战后也重新回到了 Strasbourg 大学，他在那里的同事还有 Thom(道姆)、Reeb (瑞布)、Koszul 等人，吴文俊也曾一度在那里作过研究工作。在这期间 Schwartz、Godement、Dixmier、Bruhat 等人先后加入 Bourbaki 集团，而 Eilenberg 和 S. Lang 也成了 Bourbaki 的为数不多的外国成员。

在战时(1939～1942)，Bourbaki 的《数学原理》只出了 4 册。从 1947 年起加快了出版，10 年之内又出了 18 册，到 1959 年共出了 25 册，基本上把“分析的基本结构”这部

分出齐了。在这期间许多册还多次被再版。到了 60 年代，出版速度又慢了下来，10 年内仅出了 10 册。其后，便基本上陷于停顿状态了。

Bourbaki 的《数学原理》产生了巨大的影响。他们的思想及写作风格成为青年人仿效的对象，很快地“Bourbaki 的”便成了一个专门的形容词。战后不到 10 年，Bourbaki 的名字就风靡了欧美数学界。

使 Bourbaki 更为出名的是它的许多成员在战前和战后的工作开始为大家所知，尤其是代数数论、代数几何学、李群、泛函分析等方面的成就。这也就使得 Bourbaki 的活动变得更加引人注目了。

战后纯粹数学的两个最活跃的领域是代数拓扑学和泛函分析。这两个分支提供了大量的新工具、新方法，大大推动了其它数学分支的发展。然而，这两部分工作都与 Bourbaki 学派有着密切的关系。

1. 代数拓扑学

第二次世界大战前，主要的拓扑学家大都集中在苏联和波兰。1935 年 9 月，在莫斯科召开了第一次国际拓扑学大会，法国的到会者只有 A. Weil，他那时才是个初学者。1939 年底波兰数学家 S. Eilenberg(后来成为 Bourbaki 学派为数极少的外籍成员)到达美国，对于代数拓扑学作出极大的贡献。特别是 1944 年他和 Steenrod(斯泰洛特)一起把同调论公理化，结束了战前那种多种同调论并存的混乱局面。但是，战前刚刚兴起的同伦论却进步很慢，以致象 Pontrjagin 这样的数学家也经常犯计算错误，所以后来他干脆就放弃了这项工作。拓扑学权威 H. Hopf 战后来到巴黎，承认巴黎已成了拓扑学的中心。而这个中心的形成是和 H. Cartan 的讨论班分不开的。

1948 年末，H. Cartan 举办了以代数拓扑学为研究对象的讨论班。这个讨论班系统地总结了代数拓扑学的发展，有效地推动了拓扑学的研究工作。在此期间，H. Cartan 引进了甲（Carapace）的概念，证明了吴文俊建议的关于 Steenrod 运算的 Cartan 公式，还得到了 Steenrod 代数的 Adem 公式，决定出 Eilenberg-Mac Lane(麦克莱恩)代数，从而给同伦论提供了有力的工具。他的学生 Serre 利用 Leray 创造的谱序列工具，在球面的同伦群的计算方面取得了重要突破，使得同伦论获得极大进展。

代数拓扑学不仅本身很重要，而且能渗透到每一个数学领域，推动整个数学的发展。因此 Dieudonné 认为"代数拓扑学和微分拓扑学是数学的女王"。代数拓扑学的第一个重要应用是他同 Eilenberg 于 50 年代初一起创立的同调代数学。这门学科的思想方法主要来源于代数拓扑学。由于应用了这种强有力的方法，所以在群论、环论、代数论等方面都得到了许多过去无法得出的结果。利用同调代数理论，可以非常简洁地将整个类域论表现出来，并对非 Abel 类域论的发展有所预示。同时，Serre 和 Grothendieck 还利用代数拓扑学和同调代数对代数几何学进行了抽象化和一般化的工作，这样，不仅使过去的结果更加精确，而且在一般域上又得出了许多出色的结果。

Cartan 的讨论班把过去 É. Cartan 在 1930 年左右建立的纤维空间概念，以及经许多人(特别是 C. Ehresmann)发展成的纤维丛概念加以系统发展，再结合谱序列、层、Steenrod 运算等工具，构成了一套完整的理论，并得到了许多新的结论。

Cartan、Chevalley、Weil、A. Borel 等人研究了李群的拓扑，并且把李群理论发展成代数群的理论。Chevalley 还用李代数方法有效地对有限单群进行了分类，由此而开辟了有限群论的新时期。

有了“纤维空间”及“层”等重要工具，H. Cartan 在 30 年代研究的多复变函数也取得了极大进展，Cousin 问题的解决就是其中最主要的一项工作。

在这些应用中，起着主要作用的是 Eilenberg 和 Cartan 等人系统化的同调代数方法。同调代数方法比原来的抽象代数方法更加强有力，它来源于代数拓扑学。代数拓扑学把几何对象对应于代数结构，而同调代数则把代数对象对应于代数结构，因此有利于深入研究代数结构以及其它有关的结构。

2. 泛函分析

第二次世界大战之后的十几年间，在泛函分析方面取得的进展主要是来自 Bourbaki 学派成员的工作。无疑，其中最有影响的就是 L. Schwartz 的广义函数论。1950～1951 年出版的《广义函数论》系统地总结了这方面的成果，在理论及应用上都作出了奠基性的卓越贡献。与广义函数论密切相关的有以下几个方面的理论。

(1) 拓扑向量空间。广义函数的主要定理要靠局部凸空间理论的普遍结果来证明。但是在 1945 年，最一般的拓扑向量空间还是 Banach 空间，它并不能直接应用于广义函数论。Dieudonné 和 Schwartz 把 Banach 空间理论特别是对偶定理推广到一般的局部凸拓扑向量空间上（他们的 F 及 LF 空间），这对于广义函数理论是极为重要的。在 Dieudonné 和 Schwartz 的文章中，有一些问题没有得到解决，后来，年轻的 A. Grothendieck 很快就解决了这些问题。Grothendieck 在 1950～1955 年对泛函分析作出了重大贡献，特别是他推广了张量积的理论，进而得出核空间理论，并且找到了种种的应用。另外一些 Bourbaki 成员象 Cartan 和 Serre 在复流形的层理论中就找到拓扑

向量空间理论一些重要的应用。

(2) 广义函数论。L. Schwartz 关于广义函数论的工作结果，最早是在 1945 年发表的。这项工作是数学不断发展的必然产物，它能在理论分析和应用上提供方便的工具。比如说，泛函分析中许多常用的算子不能表为积分形式，即不能找到核函数，而对广义函数论中函数空间之间的线性算子来讲，却有一般的表示定理。他在论述上具有和 Bourbaki 的著作同样的特点：抽象、一般、严格、完备、漂亮。后来，Schwartz 的学生 J. Riss(李斯)从一般的结构理论出发，把广义函数论推广到一般的局部紧致 Abel 群上。

(3) 在分析上的应用。有了这样严整的体系，立即在分析中产生反响。Schwartz 指出这一理论有可能应用于 Cauchy 问题。1955 年，他的学生 Malgrange (马尔格兰日)得出了任意常系数线性偏微分方程"初等解"的存在定理。

第二次世界大战以后，Bourbaki 学派不仅恢复了积极的活动，发挥出了重大的国际作用，而且还在年轻一代的数学家中物色了许多出色的"接班人"，其中最著名的有 Serre 和 Grothendieck。

3. Jean-Pierre Serre

Jean-Pierre Serre 是 Bourbaki 学派中继 Schwartz 之后第二位获得有国际声誉的 Fields 奖的人。他获奖时还不满 28 岁。这个获奖年龄不仅是空前的，也许还要绝后呢。

Serre 1926 年 9 月 15 日生于法国南部的 Bages，他的父母都是药剂师，他在 Nîmes 上中学，从小就显露出了非

凡的数学才能。1944 年 8 月，巴黎获得了解放，这时，还不到 18 岁的 Serre 考入了高等师范学校。当他快毕业时，Bourbaki 的讨论班已经开始了活动，老一代的 Bourbaki 成员向学员们介绍了国际上最重要的数学成就，其中许多是 Bourbaki 学派成员自己的工作。H. Cartan 的讨论班也从代数拓扑学入手，对过去 50 年来的代数拓扑学所取得的成就进行了整理。Serre 正是在此时开始踏上了他的科学征途。

Serre 最早进行的科学工作是代数拓扑学。继Poincaré之后，苏联、波兰、瑞士、德国、英国、美国、荷兰、捷克等国都有许多人在搞代数拓扑学，唯独法国好象无人问津。Bourbaki 学派的创始者们早就意识到这门学科的重要性，并在第二次世界大战前后，开始摸索这方面的经验，也曾取得了一些成就。象 Ehresmann 关于纤维丛的概念，以及他对于 Grassmann 流形的上同调环的工作，这些都对后来的发展很为重要。在战争期间，法国数学家 Leray 在德国的集中营里坚持研究，发现了“层”和“谱序列”这两个极重要的工具。不过他并没有把它们应用到具体问题的解决上。

在当时，代数拓扑学中的基础理论——同调论已经发展得比较完整了。而与此有关的同伦论则裹足不前，原因是同伦群很难计算，甚至球面的同伦群至今还没有完整的结果。年轻的 Serre 在 H. Cartan 的指导下，发展了纤维空间的概念，利用谱序列这一工具，把同伦论向前推进了一大步。他不仅仅改进了计算工具，同时也得出了最重要的结果，比如在一般情形下球面的稳定同伦群都是有限群等等。

50 年代初，Serre 还在同调代数方面做了许多工作，象研究群的上同调等问题。同调代数的出现，立即对抽象代数及其他分支产生了重要影响，比如 Serre 在 1955 年证明了正则局部环的同调刻划。

另外，Serre 更进一步抽象化了 A. Weil 的代数几何

学。他在 Princeton 的时候，帮助 Hirzebruch 推广了代数几何学最重要的 Riemann-Roch（洛赫）定理。这个定理开始只对代数曲线有证明，后来推广到代数曲面，但对于高维代数簇谁也不知道应该具有什么形式。Serre 以其深刻的洞察力得到了这个表示。

1955 年，Serre 在复流形及代数几何学等领域取得了突出的成就。他写的“FaisceauA lgébriques Coherents”(凝聚代数层)及“Geometrie Algebrique et Geometrie Analytique”(代数几何学与解析几何学)这两篇文章，分别以 FAC 及 GAGA 的缩写成为数学的近代经典文献。层的理论是法国数学家 J. Leray 在 1945 年发表的，他原想用层论研究代数拓扑学，特别是纤维丛的同调论。但 H. Cartan 发现多复变函数更需要层理论。1955 年，Serre 又系统地把层论应用于抽象代数几何学中。以前，大家都认为解析几何学是 Descartes 等人所开创的以坐标通过代数方法来研究几何图形的一门学科。实际上，当时对解析的了解就是代数方法，即把几何问题归结为可以计算的代数问题，其实这也就是原始的代数几何学。过去，代数几何学的内容是满足代数方程的曲线和曲面，19 世纪后半期推广到更高维的代数簇——多变元多项式的零点。具体来说，代数方程和非代数的超越方程有着很大的差别，但是抽象地看，它们又具有共同性。

从 50 年代后期起，Serre 的兴趣转向代数数论，但是他在纯粹数学的许多领域中仍然作出了重大贡献。的确是一位 Bourbaki 式的全才。尤其值得一提的是，Serre 的论文和书都写得非常清楚干净，极易让人抓住他的主要思想。Adams（亚当斯）在一本书中赞扬说，他的每篇文章都值得一读。

4. Abxander Grothendieck

Abxander Grothendieck是一个富有传奇色彩的人物。与其他人不同,他既不是出身名门,也没有受过特别正规的教育。他热衷于政治运动,主要是无政府主义运动以及和平运动。许多人曾慕名前来向他求教代数几何学,他有时反而进行一套无政府主义宣传,动员求学的人参加他的政治活动。60年代,他被聘为巴黎国际高等研究院的终身教授,但是当他获悉该机构受到北大西洋公约组织资助时,他就辞去了职务,回乡务农,打算身体力行那种自食其力的生活。他对苏联的扩张侵略行径也极为反感。1970年在国际数学家大会上,苏联科学院院士Pontrjagin做了关于"微分对策"的报告,其中牵涉到导弹追踪飞机之类的问题,他不顾大会的秩序,上台抢话筒,打断Pontrjagin的演说,抗议在数学会议上演讲与军事有关的题目。他发现数学研究都直接或间接地受到军事方面的资助,并与军事有着密切关系。于是,他终于在1970年脱离了数学研究。在他短短20年的数学家生涯中,给人们留下了极为丰富的研究成果,这些成果对于后来数学的发展有着巨大的影响。

Grothendieck于1928年3月出生在柏林,后在法国的南部长大,他没有受过什么正规的数学训练,也没有读过多少数学方面的书,只是经常独立地思考一些问题。当他把自己想出的一些结果请Dieudonné等人审阅时,他们发现他独立地发现并证明了许多已知的定理,于是,就指导他去搞一些新的题目。这样,他开始了对泛函分析的研究。

Grothendieck关于拓扑向量空间的研究,现在已经成为众所周知的经典著作,而且在泛函分析中有着越来越大的用处。尤其是他引进的"核空间",是最接近于有限维空间的抽象空间。利用核空间的理论,可以深刻地解释广义函数

论中所碰到的许多现象。他在 Dieudonné 及 L. Schwartz 的工作之后，又把泛函分析建立在一个新的基础上，从而改变了第二次世界大战后泛函分析的面貌。在做这项工作时，他还只有 20 多岁。他以自己的独创性、深刻性及系统性使数学界大为震惊。1966 年，Dieudonné 在介绍他的工作时讲道，Grothendieck 在这个时期的工作同 Banach 的工作，在数学的这个分支（即泛函分析）中留下了最强的标记。要知道，Banach 集泛函分析之大成，是泛函分析最主要的创始人。

50 年代中期，他由泛函分析转向代数几何学的研究。他的工作标志着现代抽象代数几何学的扩张和更新。他不仅建立起一套抽象的庞大系统，而且应用这些概念、工具解决了许多著名的猜想及难题。1973 年 Deligne 解决了 Weil 猜想，主要靠 Grothendieck 的这一套概念和工具。

代数几何学是一门古老的学科，它最原始的对象就是代数曲线和代数曲面。圆、抛物线、椭圆、双曲线就是最简单的代数曲线；椭球面、抛物面、双曲面等等是最简单的代数曲面。Descartes 发明解析几何之后，空间的点用坐标 (x,y) 或 (x, y, z) 来表示，空间中的曲线与曲面就用其上坐标满足的方程或方程组来表示。如果曲线或曲面的方程或方程组可用坐标的多项式来表示，就说曲线、曲面是代数曲线、代数曲面，否则就称为超越曲线或超越曲面，比如指数曲线、正弦曲线等等都不是代数曲线。由于代数曲线和代数曲面都是多项式的零点，所以不难看出，曲线和代数曲面的几何性质与多项式的代数性质是密切相关的。因此可以推测，代数方法在代数几何学的研究中显然会起着巨大的作用。不过，在抽象代数发展之前，代数几何学并没有一个严格的基础，比如说对两个曲面的相交情况，一般就得不到准确的分析。

E. Noether 创立抽象代数学之后，首先是在代数数论

上显示出了巨大的威力。她的学生 Van der Waerden 为解决某些代数几何学的问题，系统地研究了抽象代数学，特别是掌握了交换环这个工具。从30年代起，他共写了十多篇论代数几何学的文章，试图为代数几何学奠定牢固的基础，但是只取得了部分成功。真正把代数几何学奠定在抽象代数严格基础上的，是 A. Weil 和 Zariski。他们的工作大大扩展了代数几何学的领域。首先，是由复数域到一般域，其次，由代数曲线、曲面推广到一般的代数簇(或流形)，定义是完全内蕴的，也就是抛掉装着代数簇的外围的空间。再有，引进了 Zariski 拓扑，通过它把每点联系在一起，而每点都对应着一种特殊的交换环——局部环。这样，就定义了"抽象代数簇"。这样代数几何学的研究就变成抽象代数学的问题了。

1946年出版的 A. Weil 的《代数几何学基础》，是战后代数几何学的第一部经典著作，它大大地推动了代数几何学理论及应用的发展。同时，由于拓扑学的兴盛，从代数拓扑学借来的工具使抽象代数几何学日新月异，更趋完美。在这些工具中包括有1945年 J. Leray 引进的"层"，层的概念十分自然地表现了代数簇每一点上都对应一个局部环。这样一来上同调的有力武器大行其道，从而使一般的 Riemann-Roch 定理应运而生。在这方面，Serre 作出了巨大贡献。

此时，代数几何学已经足够抽象了，甚至在代数几何学的书中连一个图也找不到。虽说如此，"抽象代数簇"在人们头脑里还是反映出一些代数曲线、代数曲面的形象，只是这个形象变得十分复杂、十分模糊罢了。A. Grothendieck 采取了彻底的革命行动，把几何形象的最后一点痕迹也抹去了。

1956年，Grothendieck 在 Bourbaki 集体里受到了多方面的熏陶，大大激发了他那富于独创性的心灵。他制

定了一项宏伟的计划，然后一步一步地加以实现。当他1970年引退的时候，已经完成了十多册巨著。后来，由Deligne及Bourbaki的其他成员又陆续地加以了补充，使它们基本构成了一个完整的体系。这套系统可以命名为“概型(Schema)论”。

1956年底，P. Cartier(卡蒂叶)向Grothendieck建议对代数几何学再进行一次巨大推广。在其中把“代数簇”推广为“概型”，而它一点也没有几何的味道了。过去代数几何学溶入交换代数学，只用到其中一小部分，也就是一个仿射代数簇对应这个簇上的“正则”函数环。这是一种特殊的交换环，即一个几何对象对应于一个代数对象。反过来，任何一个交换环是否能够对应一个几何对象呢？Grothendieck的概型就是这么来的。对于一个有单位元的交换环，他能造出一个几何对象，其中的每一点对应这个环里的一个素理想。这些素理想通过某种拓扑联结起来，同时带有“层”的结构。

这种结构有许多好处：当把环A同态地映到环B时，环B的素理想的原象是A中的素理想，这样可以用“范畴”的语言来描绘，同时可以通过“换基”的办法由一个“概型”来造成新的“概型”。它不仅具有极大的普遍性，而且十分干净漂亮。

Grothendieck在代数几何学方面发表的第一个工作是推广了Riemann-Roch定理。它把这个代数几何的中心定理推广到任意特征的域上，而且在证明时用的是纯代数的方法。正是在这个工作中，他引进“K理论”的最初一些概念，其中包括现在常说的“Grothendieck群(环)”。这个思想深深打动了拓扑学家及代数学家，从而形成了拓扑K理论及代数K理论两大分支，它们在许多数学领域中有着许多光辉的应用。

要想对Grothendieck在代数几何学上的贡献和成就

进行哪怕是极为粗略的介绍，也是极为困难的。不过，他的抽象而普遍的概念和理论并不是一堆毫无用处的名词术语，而是有着极为广泛而深刻的应用。其中最突出的是 Deligne 在 1973 年完成的 Weil 猜想的证明，这主要是靠 Grothendieck 提供的一整套工具。Weil 猜想是数论中最重要的猜想，它是关于不定方程的解的数目估计。所谓不定方程，在这里是指整系数多项式，其中未知数的个数比方程的数目多。几千年来，数学的一个中心问题就是求这类方程的整数解。Weil 猜想使得一大类不定方程的解数问题获得了比较确切的答案。至于人们猜测没有非平凡解的那些不定方程如 Fermat 大定理（即 $x^n+y^n+z^n=0$，当 $n\geqslant 3$ 时，没有非零的整数解）还没有得到证明。



J. P. Serre(1926～　)



A. Grothendieck(1928～　)

Grothendieck 还发明了许多更普遍的概念，如“位”(Sites)与“拓扑斯”(topos)。众所周知，拓扑的概念是通过开集定义的。而现在位则是通过特殊类型的映射来推广拓

扑概念的，这样就可以得到一套研究数论与几何的新工具。

1970 年 Grothendieck 辞去了高等研究院的职务。后来又去 Montpellier 大学任教。这时他已经不再进行数学研究了。他在 60 年代的讲义由他的学生进行整理出版，至今还不能说已经出齐了呐！

5. 其他的新人

Bourbaki 在它的发展过程中，吸引了许多有才能的年轻人。Bourbaki 在挑选人时，不仅要看他的数学才能，还要考虑他对数学的整体是否感兴趣、是否有自己的见解。那种只钻牛角尖的人，就是再有才华 Bourbaki 也不欢迎。

因此，Bourbaki 吸收的人一方面在自己的本行上能独挡一面，另一方面还能对整个数学的发展提出个人的见解。第二次世界大战之后，他们还吸收了下面一些数学家。

J. L. Koszul，微分几何学家。他使用新的同调方法研究李代数上的同调，研究微分代数及李变换群，H. Cartan 把他这方面的结果称之为 Hirsch-Koszul 理论。

R. Godement，主要研究局部紧群的表示，也就是广义调和分析。他从 40 年代起就发表了许多论文，主要工作是把有限群表示论的“特征标”理论推广到了无穷维表示。他还给出了许多半单李群的表示结果。

F. Bruhat，主要研究李群理论及李群的表示理论。他使用 Schwartz 的广义函数论为主要工具。后来研究 p-adic 李群。

J. Dixmier，算子代数的权威。他开始研究 von Neumann 搞的 Hilbert 空间的算子环，后来研究 C^* 代数，这与量子场论的公理化密切相关。他也对李群的表示论有很多贡献。

P. Samuel，代数学家，他主要研究代数几何学中的抽

象代数方法。

P. Cartier，他是现在主持 Bourbaki 讨论班工作的主要人物。他是位多面手，先是对代数几何学，后来对代数数论、概率论、量子场论、统计力学、组合问题都有许多研究。他在 60 年代对形式群的研究极为重要。

第八章　由盛而衰

60 年代中期，Bourbaki 的声望达到了顶峰。《数学原理》成为新的"经典"，经常作为文献征引。Bourbaki 讨论班的议题无疑都是当时数学的最新成就。在国际数学界，Weil、H. Cartan、Dieudonné、Chevalley、Serre、Grothendieck 等人都有着重要的影响，连他们的一般报告和著作，都引起很多人注意，不过其中有些夸大其词的言论（尤其是 Dieudonné 的）也不免引起争议。1978 年，国际数学家大会在芬兰首都赫尔辛基召开，又一次请 Weil 做大会报告。他报告的题目是数学史。当时，不仅大会讲堂坐无虚席，就连每个转播教室都挤得满满的，这种"叫座"的情形真可说是非同一般。战后从 1950 年到 1966 年，国际数学家大会颁发的 Fields 奖，共有 12 位获奖者，其中法国获奖者占 4 位，并且有 3 位是 Bourbaki 成员：Schwartz，Serre 和 Grothendieck；还有一位 Thom 虽不赞成 Bourbaki 主义，但他也是在 H. Cartan 和 Ehresmann 的 Bourbaki 精神指导之下，在战后培养起来的。这无疑说明了国际上对 Bourbaki 的承认。数学没有诺贝尔奖，Fields 奖只授与年轻人，不足以代表一位数学家的全部成就。到了 1978 年，以色列开始颁发国际 Wolf 奖，每奖 10 万美元（数目接近诺贝尔奖），授给当代最大的数学家。以后的三年中共有 8 人获奖，其中 Bourbaki 成员又占 2 人，即 A. Weil 和 H. Cartan。

在法国，有限的几个科学院院士名额一直为函数论方面的专家所垄断，而且由他们请来的国外院士，也有些是并不怎么高明的函数论"专家"。这些位置是终身制，老头不

死，新人也不能增补。更有趣的是老头们大都寿星高照，Hadamard 活到 98 岁，Montél 活到 99 岁，其他人少说也有 80 多岁。然而，即使是这样坚固的一座学术堡垒，也終于在60年代中期被声名日益显赫的Bourbaki成员所征服。1965 年，Dieudonné、H. Cartan、Chevalley 都被选为通讯院士，不久，前两位又转成正式院士。其后，Schwartz、Serre 等人也成为正式院士。后来成为院士的还有新一代的 Thom、Deligne 等人。而且 1982 年Weil 及 Connes(科纳)也被选为正式院士。这样，Baurbaki 已在法国科学院占了绝对优势。

数学家都有互相祝寿的习惯，但是 Bourbaki 的头面人物 A. Weil、Dieudonné、Chevalley 等人的寿辰却无人张罗，这或许是他们骂人太多、得罪人太厉害的缘故。A. Weil 一直到前不久才被美国科学院选为国外院士，以前显然有某些有势力的美国数学家在从中作梗。Bourbàki 成员当中，H. Cartan 的人缘不错，所以有人庆他的 70 大寿。Schwartz 65 岁时，人们编了两套论文集献给他。年轻的 Serre 才 50 岁，Inventione Mathematicae（数学发明）杂志就出了整整两卷的庆寿文章，大多数人是当代第一流的数学家：从 Atiyah(阿蒂亚)到 A. Weil，这种情况在国际上可能也是空前的。

过去数学家一般是在死后才由他的学生或亲密同事来编全集出版。有些还出版的相当迟，比如 E. Noether 的全集到 1982 年她诞辰百周年时才出版。可也有些人在生前就已经出了全集或选集，这其中就有 A. Weil、H. Cartan 及 Dieudonné。A. Weil 的三卷全集别具一格，他在每篇文章之后都要讲述这篇论文的来龙去脉。这套全集几乎网罗了他的所有论文，它既是难得的宝贵资料，又是数学宝库中一笔重要的新财富。

Bourbaki 成员在数学界的威望使他们的社会地位也

大大提高。H. Cartan 作为法国科学界的代表人物之一，经常参与一些政治、人道方面的社会活动，比如抗议苏联当局迫害科学家等等。

由于 Bourbaki 获得的成就，使得“新数学”从60年代起进入中小学数学教学，从而造成了巨大的社会问题。幼稚园的小朋友要学集合论，到中学就要教环与理想，这不仅学生吃不消，连教师也叫苦连天。这种“新数学”教育在法国、美国等国家推行一段时期之后，效果明显不佳，因此有些人就迁怒于 Bourbaki，形成了一股反 Bourbaki 的浪潮。其实，虽说 Bourbaki 的活动是以教育开始，但他们的目的并不一定是要推行新数学，他们也不一定对中小学数学教学有多大兴趣，这只不过是有些好事者在借题发挥罢了。

Bourbaki 也在进行调整，老的一代陆续退出，新的一代逐渐成长。

1. 接 班 人

P. Deligne 一直是生长在 Bourbaki 的环境中。1944年10月3日他出生于布鲁塞尔，十几岁就开始读Bourbaki的《数学原理》，他觉得很容易，而且很有兴趣。于是，他就到布鲁塞尔大学去旁听数学。著名的群论专家 Tits（蒂慈）发现了这位天才，将他送往巴黎。后来，这位20岁出头的年轻人就出现在当代的大数学家 Serre、Grothendieck、Atiyah 等人的身边。他坐在一个角落里，认真听着、思考着。有时，主讲人讲到一些尚未解决的问题，他听完后，提出可以如此这般地进行解决，有时这些大师们对他的方法也感到莫名其妙。没过几年，他的老师 Serre 和 Grothendieck 都承认他确有才能，Serre 后来还向 Deligne 请教过问题，Grothendieck 也曾说 Deligne 胜过自己十倍。自然，他们都很谦虚，但是 Deligne 无疑是才智过人。1973年 Deligne

完全解决了 Weil 猜想，这是70年代纯粹数学的最大成就，为此，他荣获了1978年的 Fields 奖。同年，他成为法国科学院外籍院士，这恐怕是最年轻的一位。同时，他还是高等科学研究院的终身教授。另外，他和 Bourbaki 的许多成员合作整理了 Grothendieck 的讲义。

然而，他不承认自己是Bourbaki 成员，这的确令人遗憾。与他同时的其他的一些 Bourbaki 成员，大都没有他那么广博，那么深刻，而往往只是某一领域内的专家，这恐怕也是70年代的趋向吧！例如，Bourbaki 讣文中列举的一些人就是如此：Demazure 是代数几何学和代数群的专家，他喜欢用 Grothendieck 那极为抽象的一套理论；Douady、Giraud、Verdier 等人也都是代数方面的专家。

1968年，法国局势的动荡不仅导致了戴高乐的下台，而且使法国的高等教育体制也发生了大规模的改革。虽说 Bourbaki 已经宣告逝世，但这就象宣布 Bourbaki 结婚等告示一样，仍被看成是喜欢开玩笑的 Bourbaki 成员们的游戏文章。尽管 Bourbaki 学派后来还有活动，不过已经不象战后的20年间那样声名显赫、举世瞩目了……

2．Bourbaki 讨论班

Bourbaki 的活动依然在继续。自从1968年出版了《数学原理》的第34册后，到1975年之前又相继出版了4册，以后就几乎没再有新的作品问世。也许，随着第一代人的衰老，Bourbaki 成员逐步发现他们早年立下的雄心壮志太不现实了。年轻的一代或许是没有精力和兴趣在他们工作之余再热心地讨论教科书问题，更何况这个工作看起来是根本没有尽头的。

在这期间，最为活跃的可以算是每年3次的 Bourbaki 讨论班了。1968年以后，每年的2月、6月和11月都在

Henri Poincaré 学院举行 3 天的专题讨论，每天要讨论 2 个报告。这样，一年共有 18 个报告。每一年度的报告都交给 Springer 出版社，并发表在 Lecture notes of Mathematics (数学讲演录) 这套丛书中。但从 1981～1982 年度起，改在 Asterisque 杂志上发表。

在会上，老一辈的 Bourbaki 成员还是饶有兴趣地听取年轻同事的关于当前数学最新进展的报告。H. Cartan 就经常参加讨论班，J. Dieudonné 也几乎是每次都到，他们一如既往地提出问题，并发表自己的意见，有时他们自己也做报告。1976 年 Serre 过了 50 岁之后，Cartier 也许是讨论班上最活跃的人了。

Bourbaki 讨论班可以说是世界上唯一讨论当代数学重要进展的讨论班。由于 Bourbaki 的声望，许多人慕名而来。讨论班上不仅有法国各地的数学家，而且还有不少的外国学者参加，每次的听众总不下于 100 人。

1976 年 2 月，Bourbaki 讨论班上的报告已经排到了第 500 号。于是，Dieudonné 以讨论班上的报告为中心，写了一本名叫《纯粹数学大全——Bourbaki 的选择》的书，并于 1977 年出版。书中概述了战后 20 多年来数学的巨大发展。但是，这本书在数学界引起了一些人的不满和争论。原来，Dieudonné 按照 Bourbaki 的标准，在这本书中只选择了数学中最有影响、属于主流的 20 个分支进行叙述，并特别强调了代数拓扑学与微分拓扑学、微分流形与微分几何学、代数几何学、代数数论、偏微分方程、抽象调和分析等尖端学科，而对于单复变函数论、一般拓扑学、结合代数等则只字未提。另外，书中每一章的末尾都列有一个对各个分支贡献最大的数学家名单，然后对其余的数学家又单独开列了一个人数众多的名单。无疑，判定某位数学家的贡献大小肯定带有作者的主观因素，这样就不可避免地会引起一些人的非议。但总的来说，名单开得基本上还是公平的，只

是有一些遗漏,最重要的遗漏就是 Dieudonné 自己。在名单中出现次数最多的人是 A. Weil,他几乎出现在十几个分支中,当然,他的贡献也的确非常大。另外,H. Cartan、C. Chevalley、J.-P. Serre、A. Grothendieck 也都多次被提到。这反映出 Bourbaki 的主要成员对于数学的一些重要领域确实作出了实实在在的重大贡献。在这点上,恐怕没有什么人持有异议。

3. 偏离 Bourbaki 的趋向

Bourbaki 的数学体系常常因其极端形式化、抽象化、公理化以及脱离实际而遭到批评,还有些批评者认为 Bourbaki 的数学是不结果实的。实际上,这些批评是不公正的。脱离开 Bourbaki 成员们对数学本身的伟大贡献,很难看清 Bourbaki 的实质。Bourbaki 的确追求数学形式上的严整及漂亮,但是,他们的抽象概念并不是无源之水,无本之木,他们也从来不做那些为推广而推广、为抽象而抽象的工作。不过,脱离实际的工作在当前确实存在,甚至在某些领域还颇为泛滥,于是有些人把它们归咎于 Bourbaki,这似乎也不能说完全没有道理。可是,归根结底,这只能算是偏离 Bourbaki 的一种趋向。

在现代数学的研究中,这种趋向是占有相当比例的。其中以代数学及一般拓扑学表现得尤为突出。象比群还要一般的半群,既有一大套理论又有专门的杂志,还有人把群的公理进行加加减减而形成了许多"二元系理论"。另外,对于一般的代数运算也出现了"泛代数"理论。又如,交换环由于与代数几何学密切结合而有着稳定及健康的发展,并且在许多方面(如奇点理论、复解析几何、组合理论等)都有重要的应用,但是也出现了一些人为制造的特殊环。在结合代数的理论中,这种现象也很严重。结合代数曾在 Noether

的手中发展成为研究数论的有力工具，但后来过分追求公理化，为推广而推广，而且头绪繁多，内容琐碎，缺少实际背景，也没有太多的用处。而对于要求用到结合代数的算子代数理论和李群李代数理论，结合代数又不能提供有效的方法，这就形成了孤芳自赏、非专家难于理解的状况。非结合代数虽然有实际背景，但是也有同结合代数类似的情形。

Bourbaki 在《数学原理》中整理出的一般拓扑学已经非常简洁、非常系统化，而且便于应用。可是自 50 年代以后，一般拓扑学中又涌现出了大量的新概念、新公理。拿紧性来说，不仅恢复了被 Bourbaki 取消掉的列紧，而且还出现了可数紧、弱可数紧、伪紧、σ 紧、σ 局部紧、强局部紧、元紧、可数元紧、可数仿紧、……等等。至于各种各样的拓扑，各种各样的空间，就有几百个之多。它们之间有着许多复杂的关系，但是在描述上缺少深刻的定理。一些重要的猜想，如有 40 多年历史的正规 Moore 空间猜想，至今还没有解决，而且在现有的集合论公理之下是不能得到解决的。

4. 范畴与函子

比"数学结构"更加抽象化、更加形式化的理论是"范畴"(Category)与"函子"(Functor)的理论，它是结构理论的自然延伸，也是代数拓扑学和同调代数的自然产物。虽然，它们是一种方便的语言，但是，一般不能象数学结构的观念那样，产生积极的结果。因此，有的 Bourbaki 成员并不赞同这样的"推广"。象 A. Weil 就曾说过，它只不过是形式的废话。但也有的 Bourbaki 成员对搞这个玩意十分起劲。Ehresmann 从 50 年代中期起就丢开了拓扑学和微分几何学，专门搞"范畴理论"。具有讽刺意味的是，他创办了一种名叫《拓扑与微分几何手册》的期刊，上面登的没有

拓扑与微分几何的文章，而全部是范畴论的文章。这些文章都是空对空、玄而又玄，几乎谈不上有什么实际背景和应用价值。另外，他还经常召开国际会议，吸引了一批年轻人搞这套东西，并且在法国和美国有一定的市场。实际上，这是形式主义发展到极端的产物。

作为一种数学语言，范畴与函子还是有它的实际背景的。这种概念最早是 S. Eilenberg 和 S. MacLane 在 1942 年提出来的，并在 1945 年发表了系统的结果。范畴的概念是建立在数学结构的基础之上，比如群的范畴、环的范畴、拓扑空间的范畴、全序空间的范畴等等。可是范畴不仅仅是具有某种数学结构的集合的集合，它还要考虑这些集合之间保持结构的映射关系，也就是说，范畴是把集合和映射放在平等的、相互间有密切联系的地位上。而函子则是范畴与范畴之间的映射，它同样是不仅考虑集合，还要兼顾集合间的映射。这样看来，范畴和函子是集合与映射的上层建筑，它反映了不同结构之间的关系。

这两种结构之间的对应关系早在 19 世纪就已经为人所知，比如域的扩张与它们的 Galois 群之间有着某种一一对应，只不过当时还没能概括成为结构和范畴之类的语言。到了 20 世纪，由于代数拓扑学的发展，拓扑结构及群、环等代数结构之间的对应日趋明显。代数拓扑学的方法可以很容易地形式化成为同调代数的工具，并产生各种各样的应用。

到了 50 年代，范畴和函子越来越成为表述许多数学理论的方便语言。于是，Bourbaki 的一些成员开始把它们应用到具体的数学分支中去，尤其是 Grothendieck 在他的代数几何学体系中进行了大量的应用，并推动范畴论的发展。

由于范畴与函子的应用价值的提高，60 年代便出现了范畴论、范畴代数等分支，使范畴论成为极为形式化的数学体系。

5. 无 能 为 力

利用数学结构来统一整个数学的愿望诚然很好，并且也获得巨大的成功，不过，客观世界是复杂的，反映客观世界数量关系的数学也是五花八门、千变万化的。其中特别是那些与实际关系密切、与古典数学的具体对象有关的学科及分支，很难利用结构观念一一加以分析，更不用说公理化了。而且自 60 年代后期以来，这些分支有了越来越快的发展，越发难以纳入“数学结构”的范畴之中。

整数是数学最基本的对象。用结构观念只能知道所有整数的集合构成交换环，而数的具体性质却不能由此得出。特别象从欧几里得时代就有所研究的素数，至今还很难刻划，除了定义之外，还没有找到判定一个大数是素数的有效方法。一个一个具体的数很难通过结构来掌握，同时对各种整数集合用结构来刻划也是不行的。因此，象 Goldbach（哥德巴赫）及孪生素数猜想，Bourbaki 很难提供什么线索。

Bourbaki 感到无能为力的另外一个领域是丢番图逼近以及与此有关的超越数论。代数数论是 Bourbaki 大有用武之地的场所，而超越数具有一种否定的性质，即不是代数数，因此对于判定哪些数是超越数，Bourbaki 就束手无策了。无理数是另一种具有否定性质的数，有时要判定一个数是无理数也是很难的。1978 年，法国一位不知名的数学家 Apéry（阿贝瑞）证明出

$$\zeta(3)=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots$$

是无理数，这在数学界引起了轰动，有人说这是乡下佬的胜利。不错，比起 Bourbaki 的洋枪洋炮，Apéry 的武器真象

是长矛和弓箭，不过它能解决洋枪洋炮解决不了的问题。

现在正在蓬勃发展的大量组合数学问题很少能够系统化。Bourbaki 最头疼的就是对一个一个的具体问题进行具体分析。他们能一下子解决一大批问题，但是有时却在一个小问题的处理上使不上劲。

现代数学已应用到几乎所有的科学领域，它解决了很多问题，但同时也遇到了不少的问题。可是，在这方面利用 Bourbaki 的一套思想方法解决的还是不多的。尤其是实际问题往往与计算数学有关，要通过计算机进行运算，而这正是 Bourbaki 成员不屑一顾的。实际上，这也反映出他们在这方面是无能为力的。

对于现代数学常用的变分方法及控制理论，Bourbaki 成员很难插手。有位数学家不无讽刺地说："连 Dieudonné 也无法使它 Bourbaki 化。"

现代数学理论及其应用这一领域是如此的广阔，不但没有哪一个人能够掌握全局，就连象 Bourbaki 这样由许多博学多才富于创见的第一流数学家组成的集团，也难于巨细无遗地理解所有学科。60 年代以后，Bourbaki 所选择的研究范围越来越窄。由于 Herbrand 的早逝，使 Bourbaki 学派、也使法国失掉了一位杰出的数理逻辑专家。在这方面，Bourbaki 一直是比较薄弱的。原先在概率论方面 Bourbaki 也有所不足，后来 Schwartz、Cartier 等人弥补了这方面的缺陷，可是，象这种发展极为迅速的学科，对于许多知识的创新和深入，一些年龄大一点的专家是很难跟上的。

随着 Bourbaki 的无能为力，这一学派在数学中的影响明显衰落了。甚至许多人还认为这是法国数学的衰落。的确，战后的法国数学由于 Bourbaki 学派的崛起曾一度繁荣昌盛，以后，美、苏两国逐渐赶了上来，并成为数学上的超级大国，尤其是在 70 年代迅猛发展的分析数学、计算数学、

应用数学等方面，法国明显地落在后面。这也不能不说是 Bourbaki 学派片面发展数学的后果。

6. 70 年代的数学趋势

从 50 年代到 60 年代，是 Bourbaki 学派影响最大的一段时期。在这期间，不断出现有新的理论、新的方法，并陆续地解决了一批重要的新、老问题，而且在理论上和方法上出现了空前统一的趋势。到了 60 年代末，统一的趋势大大削弱，出现了分散、繁琐的迹象。各门学科因趋于过分专门，便呈现出彼此互不相关的局面，甚至在抽象代数学中，群论和环论各立门庭、互无影响，数理逻辑和概率论更是发展到非本行的人已经无法理解的程度。许多学科十分繁琐，论文成百上千地发表出来，但其中却没有什么有价值的东西。

当然，70 年代也有过许多伟大的成就，其中的许多可以明显地看出是 50、60 年代的成就的延续和发展。比如，Deligne 在 1973 年完全解决了 Weil 猜想，这与 Serre 和 Grothendieck 的代数几何学基础是分不开的；Quillen(奎仑)关于代数 K 理论的统一是以前拓扑和同调代数发展的延续；Connes 得出的关于算子代数的结果及与 K 理论的关系，也是结构思想的胜利；有限单群分类理论的完成是源于 Chevalley 用李代数的方法统一了有限单群；……；等等。

应当指出，在 70 年代获得重大发展的是分析数学、应用数学、计算数学。用计算机证明的四色定理，成功地揭开了数学历史的新篇章，开辟了机械证明的光辉途径。同时，与 Bourbaki 精神背道而驰的"构造主义"，也由一度停滞而再获新生。这样，就促使数学的发展由 Bourbaki 所指引的抽象的、结构主义的道路转向具体的、构造主义的、结合

实际的、结合计算机的道路，从而结束了 Bourbaki 学派那灿烂辉煌的黄金时代。

第九章 Bourbaki 的选择

Bourbaki 的事业就是用数学结构的观念和公理方法整理全部数学。说是全部数学，其实还是有轻有重、有主有从，即有所选择。那么，让我们来看看 Bourbaki 是如何重新安排数学世界的吧。

Bourbaki 既要立，就先要破。他们不再承认传统的数学秩序，并且认为过去把数学截然划分为代数、分析、数论、几何等互相隔离的几块区域，就好象是最原始的动物分类法一样，最终也不过是把外观相近的理论一个接着一个地排在一起，如把代数曲线理论同欧几里得几何都放在几何里面，把李群也和几何混在一块。Bourbaki 完全打乱了这种秩序，他们把代数数论和代数几何看成是近邻，认为欧几里得几何和积分方程可以搭界。他们的组织原则是结构体系的概念，这些结构由简单到复杂，由一般到特殊，形成一整套层次分明的系统。

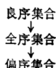
在数学世界的中心，是结构的几个主要类型：代数结构（群、环、域），序结构（偏序、全序），拓扑结构（邻域、连续、极限、连通性、维数），它们可以被称为母结构，或者是核心结构、基础结构。每一种类型的结构又各有许多分支，而且彼此间有一定关系，它们都由公理来决定。

在同一种结构中，公理数目最少的是最一般的结构。比如群的结构由 4 条公理构成，这 4 条公理决定最一般的抽象群。如果在这 4 条公理之外，再加上 1 条或几条辅助公理就可以得到特殊的群。比如，加上群的元素数目有限的公理，就得到了有限群；加上群的二元运算满足交换律，就得到交换群（也称 Abel 群）；把上述这 2 条都加上就得到

了有限交换群。群的结构的许多子结构就是这样得到的。研究一般群的理论就是群论，这个理论是 4 条公理的所有推论，对于任何群都成立。而有限群论或交换群论只是群论的某一个分支，它们的公理多了，内容也相应地特殊了，所以其结构不能推广到一般的群上。这样，在群论、也就是群的结构的理论中，有一般及特殊的层次，有基础与上层建筑之分。



同样在序结构中有



这些我们在第十章中还有详细讲述。

除了最原始的结构之外，还出现有两种或两种以上结构结合而成的结构。这些结构可以称之为多重结构。它们往往不是简单地把母结构叠加在一起而成（因为这样一般不会产生什么新结果），而是通过一个或几个公理有机地结合在一起，这些新公理正是建立结构之间的关系的。比如全序群，就是由全序结构及群的结构结合而成，定义全序群的公理，除了群的公理和全序集合的公理之外，还有两种结构相结合的公理（如 $a\geqslant b, c\geqslant d$，则 $a+c\geqslant b+d$）。同样，拓扑结构及代数结构结合在一起，形成拓扑群、拓扑环、拓扑域。而实数则是三种结构结合的典范。

我们的任务是在特殊的对象上发现新的结构，这样也可以形成新的理论。代数拓扑学就是把具有拓扑的空间中的某些点集（如单形、闭链等）当做元素，在上面引进代数运算及代数结构，也就是施行加、减、乘、除的运算，从而可以

对拓扑空间进行研究。同样，序结构和代数结构的结合，一方面可以得出整除性理论及理想理论，另一方面导致为积分、谱理论及算子理论。

沿着这条道路走下去，最后就得到了经典数学中各种特殊的理论：实变函数论、复变函数论、微分几何学、代数几何学、数论等等。现在，这些理论已经不象早先那样自成体系，而是处于“十字街头”。经过我们上面的分析（好象把结构的“分子”分解为“原子”），可以发现它们彼此之间有着血缘关系。因此，各门学科不可避免地有着彼此的相互作用和相互促进。

当然，这只是对于当前数学状况的一幅速写，或者说是对当前杂乱无章的状况的一个极为粗糙的整理，它显然是太理想化了。实际上，数学本身要丰富得多。

在数学史中，每个理论一般都来源于解决一些特殊的问题（比如从古希腊传下来的用圆规直尺三等分任意角及倍立方体等问题），可以把这些问题归成几大类：

(1) 没有希望解决的问题。例如完全数问题、Fermat 素数的判定问题、Enler 常数的无理性问题等等。它们之所以难于解决，是由于不能发现同其他的数学理论的联系，其本身也找不到结构。这些往往是很孤立的问题，在初等数论中特别多。

(2) 没有后代的问题。所考虑的问题有可能得到解决，但是它的解决对于处理任何其他问题没有什么帮助。许多组合问题就属于此类。这主要是它们比较孤立，与其他数学理论没有关系。

(3) 产生方法的问题。有些组合问题及有关数论的问题其本身比较孤立，它们的解决对于其他问题的解决帮助并不大，特别是对于其他理论影响不大。但是，为了解决原来的问题可以从中钻研出一些有用的技巧甚至方法，利用它们可以处理相似的问题或者更困难的问题。例如解析数

论中 Goldbach 问题、孪生素数问题、超越数论问题、以及有限群论中的一些问题。这些问题虽然比较孤立，但是创造出的解决方法影响却不小。这些方法的本质以及内在的结构还值得进一步探索。

（4）产生一般理论的问题。问题从特殊的情形开始，但是由于揭示出了难以预测的隐蔽结构的存在，不仅解决了原来的问题，而且提供了有力的一般工具，可以解决许多不同领域的一批问题。从而，问题本身发展成为生机勃勃的分支学科。代数拓扑学、李群理论、代数数论、代数几何学等主要问题都是属于这个类型的。

（5）日渐衰落的理论问题。正如 Hilbert 所强调的，一个理论的繁荣要依靠不断提出新的问题。一个理论一旦解决了最重要的问题（从本身意义上来看或者从与其他数学分支的联系上来看）之后，往往就倾向于集中研究特殊的和孤立的问题。这些问题都很难，而且前景往往也并不是十分美好。例如单复变函数论的某些分支。不变式理论就曾经有过多次起落，而主要是靠找到了同其他数学领域的联系才获得新生的。

（6）平淡无聊的问题。由于理论中某些特选的问题幸运地碰到好的公理化，而且得以发展出有用的技巧和方法，就导致许多人没有明确的动机就任意地改变公理，得出一些“理论”，或平行地推出一些没有什么实际内容的问题。这种为公理而公理的“符号游戏”，在数学中占有相当的比例，一般人往往将它归之于 Bourbaki 的影响。其实，这与 Bourbaki 主要成员的态度及工作大相径庭。这方面理论不少，如一般拓扑学、一般代数学等等。

数学中的内容虽然很多，问题也是各式各样的都有，但 Bourbaki 成员加以整理的和 Bourbaki 讨论班上报告的主要是第 4 类问题，间或有少量的第 3 类问题。因此，尽管 Bourbaki 所选择的主题内容庞杂、数量繁多，很难掌握，但

是，它们的特点在于其突出的统一性。其中，没有一个理论的思想不在其他一些领域中反映出来。而且，从 Bourbaki 讨论班上反映出来的也正是他们时时注意的、属于当前主流的理论。主流的特征在于各个理论与分支之间有着多种多样的相互联系而且彼此之间不断在施加新的相互影响。

一个理论不是永远处于主流而不再变动的。象非交换、非结合代数、一般拓扑学、"抽象"泛函分析等等，都曾经一度处于主流，不过后来有意义的问题越来越少，同其他分支也脱离得越来越远，并且偏于一些过分专门的问题或者搞一些无源之水式的研究，结果逐步偏离开了主流，也就偏离开了 Bourbaki 的选择。

1.《纯粹数学大观》

Dieudonné 在《纯粹数学大观》一书中，把数学主流学科分为 A、B、C、D 四个等级。A 级为当前最活跃的 10 门学科，即代数拓扑学与微分拓扑学、微分几何学、微分方程、遍历理论、偏微分方程、非交换调和分析、自守形式与模形式、解析几何学、代数几何学、数论。这些都是数学的最上层建筑。在它们的下面是 B 级学科，这些学科已比较成熟，与其他学科目前的关系不象以前那么密切。它们是：同调代数学、李群、"抽象"群、交换调和分析、von Neumann 代数、数理逻辑、概率论。C 级则更为基本，共包括有：范畴与函子、交换代数学、算子的谱理论。A、B、C 三级共 20 个学科，它们被 Bourbaki 认为是当前数学中处于主流的学科。作为它们的基础的是 D 级，共分 6 门：集合论、一般代数学、一般拓扑学、古典分析、拓扑向量空间、积分。这 6 个"基础"学科正好是 Bourbaki 在《数学原理》中所整理的内容，经过 Bourbaki 的整理，它们大都已经定型，Bourbaki 认为其后的发展不会太大了，因此 Dieudonné 在他的书中没有再加

以叙述。Bourbaki 的《数学原理》一套书中还补充了“李群与李代数”、“交换代数学”、“谱理论”、“微分流形”等内容。这些我们在下面将加以简单介绍。

2.《数学原理》

Bourbaki 学派的主要著作是《数学原理》(Élément de Mathematiques)。乍看起来，这个名称取得很平常。而事实上，取这个名称还是很有抱负的，因为它来自 Euclid 的几何《原本》(Elements)。

这套巨著究竟何时算完，谁也说不清，到现在，一共出了近 40 册。在前 20 年中，主要出的是第一部分“分析的基本结构”，即把数学的结构及其主要部分亮了出来。第一部分又进一步分成了六卷：

卷一 集合论
卷二 代数学
卷三 一般拓扑学
卷四 实变函数论
卷五 拓扑向量空间
卷六 积分论

由这六卷可以看到 20 世纪前半叶在集合论基础上发展起来的抽象代数学、拓扑学以及泛函分析和测度、积分理论。这与当时流行的教科书的老一套内容完全不同，它反映了第一代 Bourbaki 成员的观点。

这套书在内容的编排上极为别致。每卷都分为若干章，再细分为节、小节。书中还有大量的例子与练习。这些练习都不是象通常的教科书那样互相传抄或自行编造，它们都是引自许许多多数学家的原著，当然，依照惯例，练习的原作者的名字在书中没有一一标出。这些练习与正文配合得很好，而且编排得很富有启发性。许多数学家都认为，对

这套书来说，只看正文不做练习是一大损失。另外，还有些人直接从练习中吸取营养，并以此作为撰写论文的出发点。更有意思的是，当 Bourbaki 在 50 年代出名之后，不少作者因为他们的成果被“剽窃”成为 Bourbaki《数学原理》中的练习而感到自豪。

在出版时，每一卷又分为几个分册。每卷的末尾附有“词典”和“结果提要”。“结果提要”是一卷的大纲，往往先于各章出版。比如《数学原理》在 1939 年出的第一册，就是卷一集合论的“结果提要”，而集合论的正文一直到 1952 年才出版。

《词典》是 Bourbaki 精心选编的。众所周知，在一门科学成熟之前，名词的运用是非常混乱的。各人自用一套，而每人又有一批追随者沿袭他的用法，这就造成了互相理解的困难。凭借着 Bourbaki 的各位大师的威望，许多数学名词，尤其是拓扑学及泛函的新词，都以 Bourbaki 的为准。正是 Bourbaki 的《数学原理》使第二次世界大战以后的数学名词得到了空前的统一，反过来再看看 20 世纪的前 30 年，那真是混乱不堪。比如拓扑学中关键的“紧”字，一直由许多有细致差别的词汇来表述，到战后，除了 Bourbaki 规定的以外，其他的都已销声匿迹。苏联有一些保守的权威人士，还坚持用老名称，不过由于战后他们拓扑学的发展落在法国人的后面，最后也不得不改换新名。

随着名词的统一，使数学符号也统一起来了。数学文献中最常用的自然数集合、整数集合、有理数集合、实数集合、复数集合，都按 Bourbaki 的用法分别用 N、Z、Q、R、C 来表示。不采取这种表示方法的人也不能说没有，不过也是十分罕见了。

在 Bourbaki《数学原理》的词典中，还细致地列入了经典著作中的用法。比如在卷五的词典中，凡是 Banach 的《线性算子》一书中的名词及符号都用（B）标出，这就使读

者对于名词演化的来龙去脉一目了然。词典中不仅有法文名词,相应的德文、英文以及其他外文名词也被收入。一词多义以及同义词都详细列出,形容词所搭配的名词也都指出,这就使词典成为十分有价值的参考资料。

《数学原理》中的另外一项重要资料是每册后面所附的"历史注记"。"历史注记"有的比较简短,有的十分详尽,一般都是对前面几章中讨论主题的历史发展的叙述,而在正文中则根本没有谈到历史。书中的正文是严格地按照逻辑组织起来的,不容许因叙与历史而使之有所偏离。而且,正文又完全是按照新的观点进行描述的,自然同经典数学的论著大相径庭。在"历史注记"中,正文中的内容与经典数学之间的关系得到了阐明,这也使读者认识到正文的内容与经典数学有着千丝万缕的联系,而不是凭空想象出来的。"历史注记"一般都从经典原著出发,准确地叙述某一部分的历史发展,所以,将这些"历史注记"集中起来,就是一本非常好的"数学史"。

Bourbaki 的数学史有它自己的特色。首先,Bourbaki 的大多数成员,尤其是第一代元老都有极高的文化、历史修养,他们对于老一辈数学家的著作非常熟悉,而且与一般数学史家不同,他们都是进行创造性研究的数学家,对于数学内容的理解要深刻得多。他们对于整个数学有概括的了解,并能够对历史进程以及各学科分支之间的关系予以精辟的分析。尤其是他们关于近代数学史的论述是独一无二的。

按照 Bourbaki 的逻辑体系,著作一开始并不是先引进实数,而在过去,实数无疑是分析的基础。实数一直到卷三的第四章才出现,这是有道理的。因为实数的基础是三种类型结构的同时互相作用。Bourbaki 的方法就是先从最一般、最普遍的对象讲起,然后推出特殊的情形。例如从有理数出发构造实数对 Bourbaki 来讲是更一般的构造——

拓扑群的完备化(卷三第三章)——的特殊情形，而拓扑群完备化又是“一致空间”完备化(卷三第二章)的特殊情形。

第一部分的各分册都是按照这种严格的逻辑顺序来编排的。在某一处用到的概念或结果，一定都在以前各卷、各册中出现过。因此，这种严格就要付出代价，也就是整个著作显得冗长和沉闷。他们当然喜欢 Artin 著作那样的简练漂亮和 Van der Waerden 的《近世代数》那样的明白易懂，可是他们自己做不到，恐怕也不想做到。这就使得读者很难于通读全书。另外，这套书的行文风格不是很能激发人们的兴趣，因此 Bourbaki 的《数学原理》也就难于成为一部普及的教科书。不过，《数学原理》严格而精确的风格也有其优点：所有主要结果都清楚而确切地表述出来，成为一个完美的体系。而过去的许多标准教科书，尤其是 19 世纪末的几部主要的分析教科书，尽管读起来轻松愉快，可是要想确切了解其中表述得含含糊糊的断言的精确含义到底是什么，那就得通读大半本书才能搞清。所以，Bourbaki 的《数学原理》以它的严格准确而成为标准参考书，并且是战后的数学文献中被人引用次数最多的书籍之一。同时，它的这种行文风格也逐渐地成为现代数学文献的典范。

1960 年，《数学原理》的第一部分基本完成，其后又分别写了“李群与李代数”、“交换代数”、“谱理论”、“微分流形与解析流形”等四个分册，这些分册具有不同的风格，比较接近于一般的教科书，而且过于专门。

第十章 数学结构

"结构"这个词，不仅在数学上，而且在物理学、化学、天文学、地学、生物学、技术科学乃至社会科学的众多领域中几乎处处存在。它反映了一个事物诸配件之间的关系，或几种事物之间的相互关系。数学结构的概念无非也是这种朴素观念的抽象，它经过了漫长的发展过程，最后由 Bourbaki 学派定为整个数学的基础。

一般集合论的发展给结构提供了活动的场所。集合是结构的"毛"所附的"皮"。给定一个集合，如果没有赋予它什么结构的话，它的每个元素都是互不相关、彼此独立的。而元素之间如果并不"平等"，彼此相关，就和一个一般的集合不一样了。如果元素之间有大小之分、远近之别、运算关系等等，它就有了"结构"，数学就是研究这些结构的科学。

对于集合 M、又赋予结构 S，结构研究的任务是什么呢？

(1) 对于两种赋予结构的集合 (M_1, S_1) 和 (M_2, S_2)，什么时候可以把它们看成是一回事，也就是"等价"、"同构"（表示结构相同）。

(2) 对于某一类型的结构加以分类（比如群），就要把同构的群看成完全一样不加区别，而把彼此不同构的群按照"等价"关系加以分类，每一等价类选出一个代表。

要解决这两个问题是极为困难的，现已完成这两方面研究的结构为数极少，如有限交换群、单李代数等等。有些问题是属于不可判定问题，只有再放宽条件才能解决。

为了完成上述两大任务，我们往往进行比较一般的研究。

(1) 研究一个集合的子集合与商集合上的结构。

(2) 两个集合 M_1, M_2 的积集合 $M_1 \times M_2$ 上的结构。

(3) 对包含 M 的集合 M'，是否可以把 M 上的结构扩张到 M' 上。

(4) 刻划反映结构特征的不变量。如果集合之间的映射仍然保持着某种结构，则在这种映射之下，使不变量映到不变量。这种保持结构不变的映射是十分重要的。

1. 集　合

把考察的对象放在一起就构成集合。定义一个集合 M，也就是规定哪些元素属于 M，哪些元素不属于它。如 x 属于 M，也就是 x 是 M 中的元素，记做 $x \in M$。否则记做 $x \notin M$。

定义和表示集合的方法有两种：

(1) 列举元素，表为 $\{a,b,c\}$。

(2) 描述性质，也就是把集合中的元素所共有的性质举出来。比如 $\{x \in \mathbf{Q}$（有理数集合）$| x^2 < 1\}$，这表示我们定义的集合是满足平方小于 1 的所有有理数的集合。

一个集合 M 有许多子集合，也就是 M 的元素的一部分构成的集合。比如 $M = \{a,b,c\}$，它的子集合有 $\{a\}, \{b\}$, $\{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$。有时为了方便把一个元素也没有的空集合 $\varnothing$ 也算作子集合。

集合之间有着包含关系($\subseteq$)，如 $\{a\} \subseteq \{a,b\} \subseteq \{a,b,c\}$。

M 和 N 这两个集合的元素归并在一起所构成的集合称为 M、N 的并集，记做 $M \cup N$。两个集合 M、N 共有的元素的集合称为 M、N 的交集，记做 $M \cap N$。如果两个集合 M、N 没有共同元素，则 $M \cap N = \varnothing$。

如果 $M \subseteq N$，则 $N \subsetneq M$，则 $M = N$。

集合 M 中的每个子集合 P 都有一个补集合 P'，P' 是

由M中不在P中的元素组成，因此，$P\cup P'=M$，$P\cap P'=\varnothing$。

两个集合可以相乘，构成积集合。如 M_1 与 M_2 的积集合是

$$M_1\times M_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in M_1,x_2\in M_2\},$$

注意积集合与并集完全不一样。

关于集合要注意下面几点：

(1) 集合的元素是确切定义的，不能含糊不清。比如，不能说有史以来最伟大的 10 个人物，因为这样讲问题并没有确定下来。如果你认为某 10 个人物最伟大，并列举出他们的名字，这才可以说他们的集合是确定的。

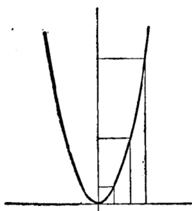
(2) 集合中的元素互不相同。严格讲来，$\{a,b,a,c,b\}$不能算是集合，它作为集合只是$\{a,b,c\}$。但是对于积集合$M\times M\times M\times M\times M$，元素$(a,b,a,c,b)$有意义，因为积集合的元素是一个五元组，不是一元组。同样地，$(a,a,a,a,a)(b,b,b,b,b)$也是$M\times M\times M\times M\times M$的元素，这也反映出了积集合和并集合的不同。$M=\{a,b,c\}$，与 $N=\{b,c,d\}$的并集 $M\cup N=\{a,b,c,d\}$，而 $M\times N=\{(a,b)(a,c)(a,d)\cdots\}$特别是$M\cup M\cup M\cup M\cup M=M=\{a,b,c\}$。

(3) 当只给定一个集合时，则不考虑结构，它的各个元素一律平等。所以$M=\{a,b,c\}$是表为$\{a,b,c\}$，还是$\{b,a,c\}$、$\{a,c,b\}$、$\{c,b,a\}$，这并没有区别。可是对于积集合$M\times M\times M$，(a,b,c)、(b,a,c)、(a,c,b)这些元素就互相有区别了。

(4) 每个集合的所有子集合构成该集合的幂集合。这个名称可以这样理解，如果一个集合有 n 个元素，那么它的所有子集合的数目共有 2^n 个，这里 n 和 2^n 称为各集合的基数。值得注意的是，一个集合虽然可以没有任何结构，它的幂集合却是具有 Boole 代数结构的。所以这两种集合

不要混在一起。

各集合之间可以通过"映射"彼此发生关系。映射是函数概念的推广。通常的函数 $y=x^2$ 表示实数集合R到实数集合R的一个对应，对于每个x值，都有唯一的y值与之相应。例如，x取0，1，2，3，4，5，…等值，y就得0，1，4，9，16，25，…等值，也就是把1映射到1；2映射到4；3映射到9；…，好象照相一样，y的值称为是x值的象。这样的函数关系可以推广到任意集合上，这时称为映射。比如正整数集合$\{1,2,3,4,\cdots\}$可以映射到正偶数集合$\{2,4,6,8,\cdots\}$上，也可以映射到负整数集合$\{-1,-2,-3,-4,\cdots\}$上。



设F是集合X到集合Y中的映射，对于X的任何子集A，A的元素在F之下的象构成Y的一个子集，称为A在F之下的象，记做$F(A)$。反过来，Y的任何一个元素y如果是X中某些元素x在F下的象，称x为y的原象或逆象。同样Y的任何子集B，如果其元素的原象集合是A，则A称B在F下的原象，记做$A=F^{-1}(B)$。

设F是集合X到集合Y中的映射，如果Y的每一个元素y都至少是X中一个元素的象，就称F是满映射（也称映上）。假如同一象点，原象唯一，就称F是单映射（也称映入）。如果F既是满映射，又是单映射，则称F是双映射（从集合来讲是一一对应）。例如整数集合Z到整数集合Z的映射F，可以有不同的情况：如$F=F_1$，则把每个整数加倍，则每一象点只有唯一原象，所以F_1是单映射，显然F_1的象只是Z的一部分，所以不是满映射。但如$F=F_2$，则

把每个整数映成它的负数，那么正数映射成负数，负数映射成正数，零仍映射到零。不难看出，F_2 既是满映射，又是单映射，所以是双映射。

2. 代数结构

代数结构反映整数集合或有理数集合中数与数的运算关系。各个数不是互不相关的，比如两个整数相加、相减、相乘仍然是一个整数，加法、乘法还满足一些算术规则。我们把这些二元运算（二个元素经运算＋或×可得一个元素）及其规则推广到任意集合上，就能够得到种种代数结构。

群是最基本的代数结构。它具有一种二元运算的性质，并且满足 4 条公理（见第三章）。我们还可以在群的公理之外再添加新的公理而得到更窄的代数结构，比如我们加上

公理 5（乘法交换性） 群的乘法满足交换律

$$a\times b=b\times a$$

这样的群我们称为交换群，也叫 Abel 群。另外，群的元素数目可以有限也可以无穷，这可以当作是又一条公理。因此，满足交换群 5 条公理且元素数目又为有限的群，当然就是有限交换群了。而有限循环群又是有限交换群的特例。有限循环群是指所有元素都可表为某个元素 x 的幂次，这个 x 称为生成元素或母元素。由于群元素数目有限，所以一定存在一个正整数 m，使 $x^m=1$。有限循环群及有限交换群的结构都已完全确定：有限循环群与模 n 的整数群同构，有限交换群等于 n 个有限循环群的乘积。

对于一般的有限群的结构，问题较为棘手。在群的元素数目（称为群的阶）较少的情况下，可以一个一个去试，列出表来。但是当群的阶数目增高时，这个问题就变得非常复杂。因为一个群还有子群，子群又有子群，子子孙孙可以延续很多"代"。我们对付这个问题的方法是把它分解成两

部分：先是找出比较基本、简单的群——单群，然后再看单群是如何组成复杂的群的。前者就相当于找出群的原子，后者就相当于由原子组成各种各样的分子。这个问题显然是群论里最根本的问题。特别令人兴奋的是，有限单群的分类在 1981 年已经完全获得了解决，这是抽象群论的伟大胜利。而在这个问题的解决道路上，最关键的一步是 C. Chevalley 得到的。

如果把群的 4 条公理减少或减弱就可以得到许多更一般的结构。其中最常见的是半群。半群是只满足群公理 1、2 的集合。它也是研究得很多的对象，在分析中很有用。但是由于它们太广了，所以很难得到一个比较完整的结果。如果半群还满足交换律，就称为交换半群。这些都是只有一种二元运算的代数结构。

抽象代数学中最重要的环或域都是具有两种二元运算的结构。为了区别起见一种叫加法(+)，一种叫乘法(×)。

环的结构是从整数的集合推广而来。整数集合有两种运算：加法和乘法。它对于加法构成群，单位元是 0，对于乘法不构成群，因为乘法的逆元素——分数不属于整数范围，因此不服从群论的第 4 条公理。但是可以证明乘法服从群的第 1、第 2 两条公理。因此，对于乘法形成一个半群。总括起来，我们就可以定义“环”了。

环的定义。一个具有两种二元运算(+，×)的集合 R，称为环，如果满足下列公理：

公理 1(加法封闭性) 如 $a,b\in R$，则 $a+b\in R$

公理 2(加法结合律) 如 $a,b,c\in R$，则

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

公理 3(加法交换律)如 $a,b\in R$，则

$$a+b=b+a$$

公理 4(加法单位元[零元]存在) R 中存在零元 0，使得对于所有元素 $a\in R$，有 $a+0=a$。

公理 5（加法逆元［负元］存在） 对于每元素 a,存在 $-a\in R$,使 $a+(-a)=0$。

公理 6（乘法封闭性） 如 a, $b\in R$,则

$$a\times b\in R, b\times a\in R$$

公理 7（乘法结合律） 如 a, b, $c\in R$,则

$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$$

公理 8（分配律） 如 $a,b,c\in R$, 则

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$

$$(b+c)\times a=b\times a+c\times a$$

显然可见,公理 1～5 说明 R 对于加法是交换群，公理 6～7 说明 R 对于乘法是半群，而公理 8 表示两种二元运算的关系。

如果环 R 满足

公理 9（乘法交换律） 对任何 a, $b\in R$,都有

$$a\times b=b\times a$$

则环 R 称为交换环，否则是(非交换)结合环。如果乘法连结合律也不满足,则称为非结合环。

交换环是代数学最重要的分支。对于代数几何学、解析几何学等有直接的影响。

如果环 R 去掉 0 之后对于乘法也构成群，则环 R 称为体，也就是对于乘法存在单位元(幺元)和逆元。如果体的乘法还满足交换律,就称为交换体,通常称为域。域有有理数域、实数域、复数域、有限域(也称 Galois 域)、代数数域、代数函数域等等。它们都是数学中最常见的对象。所有四元数的集合是非交换体的例子。体的名称很多也有叫斜域或除环的。

3. 序 结 构

序关系是从实数集合 R 中任何两个实数都可以比较大

小而来的。对于一般集合，这种关系未必存在。不过在实数的集合中，对任意两个元素 x，y 均存在$\leqslant$这样的序关系，或者 $x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$，而且$\leqslant$关系满足

公理 1（反身性） 对任何元素恒有 $x\leqslant x$。

公理 2（传递性） 由 $x\leqslant y, y\leqslant z$ 可以推出 $x\leqslant z$。

公理 3（反对称性） 由 $x\leqslant y, y\leqslant x$，可以推出 $x=y$。

我们把满足公理 1，2，3 的二元素之间的关系称为偏序关系。

因此，对任何集合 x，如果在其一部分元素之间可以定义偏序关系，则称为偏序集合，也就是这个集合有了偏序结构。假如一个偏序集合还满足公理 4，即任何两个元素恒有 $x\leqslant y$ 或者 $y\leqslant x$，则称为全序集合。

例 1．所有自然数有自然的大小顺序，显然满足公理 1、2、3，而且还满足公理 4，因此自然数集合 N 是全序集合。

2．自然数集合除了上述的序关系之外，还可以有别的偏序关系，比如说 $x\leqslant y$ 定义为 x 可整除 y，在这种定义之下 N 成为偏序集，但显然不是全序集。

3．任何集合的所有子集构成的子集族，按照包含关系构成偏序集合，也就是把$\leqslant$看成是$\sqsubseteq$。因为两个子集可以互相不包含，所以这个偏序关系也不是全序关系。

对于偏序集合或全序集合，我们可以仿照实数集合那样定义出上界、下界，极大元、极小元等等概念。设 E 是偏序（$\leqslant$）集合，A 为 E 的子集，对于每元素 $a\in A$，满足 $a\leqslant x$ 的任何元素 $x\in E$ 都称为 A 的上界。一个没有上界的元素称为 E 中的极大元素。反过来可以定义下界与极小元素。

序结构中最重要的是格(lattice)。格是一种偏序集合，其任何两个元素 x, y 具有一个最大下界（或称“交”，$x\cap y$）和一个最小上界（或称“并”，$x\cup y$）。交和并的想法是从集合论中来的，因此它们满足一些类似的规律：

1．幂等律 $a\cap a=a$，$a\cup a=a$

2．交换律 $a\cap b=b\cap a$，$a\cup b=b\cup a$

3．结合律 $a\cap(b\cap c)=(a\cap b)\cap c$

$a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c$

4．吸收律 $a\cap(a\cup b)=a\cup(a\cap b)=a$

假如一个格还满足

5．分配律 $a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c)$

$a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$

那么就称之为分配格。

分配格有一个重要的特例，就是著名的 Boole 代数。Boole 代数还满足下列规律：

6．存在最大上界 I 及最小下界 0，满足

$$0\cap a=0,\ 0\cup a=a$$

$$I\cap a=a,\ I\cup a=I$$

7．每个元素 a 存在一个补元素 a'，满足

$$a\cap a'=0,\ a\cup a'=I$$

Boole 代数乃至格的背景，都可以从集合论中看出来。如果“并”、“交”、“补”都按照集合论来解释，任何集合的所有子集合（加上空集合）就构成一个 Boole 代数。

Boole 代数的名称是来源于 Boole 研究逻辑命题的演算。如果把命题当做 Boole 代数的元素，$\cup$ 解释为“与”，$\cap$ 解释为“或”，a' 解释为非 a，那么命题的集合就形成一个 Boole 代数。任何命题的真假可以通过其原始命题的真假及命题演算来决定。

另外，Boole 代数还是电路中开关代数的一种抽象化，因此它也是具有实际背景的。这说明数学的抽象从本质上说还是反映客观世界的。

4．拓扑结构

第三大类型的结构是拓扑结构。它为我们提供了一种

对空间的邻域、极限及连续性等直观概念的抽象的数学表述。拓扑反映出一个集合各个元素之间的亲疏远近的关系。单单定义一个集合，它的各个元素可以说一律平等，彼此均互不相关。而拓扑结构则反映元素之间的亲密程度。正如一群人，象一班学生或戏院中的观众，从远处看很难说他们之间有什么关系，但仔细调查就会发现他们之间有的是近亲、有的是远亲，有的在五服之内，有的则没有什么血缘关系，这种差别反映了人群的拓扑结构。最直观的拓扑结构是欧几里得空间E中的距离，各个点相对于一点来说，并不是平等的，它们有远有近，也就是任何两点x,y之间有一个距离函数$d(x,y)$，它满足下列4条公理：

公理1 对于E中任何两点x,y，$d(x,y)$是大于或等于0的实数。

公理2 $d(x,y)=0$当且仅当$x=y$。

公理3 对于E中任意两点$d(y,x)=d(y,x)$。

公理4 （三角形不等式）对于E中任意三点x,y,z，$d(x,y)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$。

这样，我们就可以把满足这些公理的距离函数推广到任意集合E上。假如E中可定义这样一个距离函数，并且满足公理1～4，我们就说E是一个度量空间。

例如三维欧氏空间R^3中两点$x=(x_1,x_2,x_3)$和$y=(y_1,y_2,y_3)$的距离可以定义为

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

不难验证，$d(x,y)$满足上述的4条公理。

对于某一闭区间A上的所有有界实函数的集合E，就没有明显的距离定义。但是对于$f,g\in E$，$f-g$也属于E，就可定义

$$d(f,g)=\sup_{t\in A}|f(t)-g(t)|$$

容易验证这个$d(f,g)$决定“函数空间”一个距离。

若两个集合 E、E' 分别是以 d、d' 为距离函数的度量空间，f 为E到 E' 上的双映射，又 f 满足

$$d'(f(x),f(y))=d(x,y)$$

则 f 称为等度量映射。等度量映射不仅是集合到集合的一一对应，而且保持距离关系，也就是把距离近的点仍然映到近的点，距离远的点仍映到远的点，即能够保持距离这种结构的一种等价关系。对于距离空间，两空间如果存在一个等度量映射，就说它们度量等价，也就是说，从度量空间来看是一回事，我们就不加区别了。

但是，不一定每一个集合都存在一个满足上述 4 条公理的距离函数，我们必须抓住距离函数更本质的性质。对于一点来说，其他点有的近，有的远，也就是有的子集是“自己人”，有的子集是“外人”，而我们只规定哪些子集是“自己人”就行了。这种子集我们称为“邻域”。这样我们规定一套子集“邻域”就可以了。

根据实数直线上“邻域”的性质，我们发现“邻域”都是一些满足下列公理的“开集”（开区间的集合）：

公理 1　任何数目的开集的并集仍是开集。

公理 2　有限多个开集的交集仍是开集。

这样一来，我们只需规定哪些子集是开集就行了。当然，这些开集要满足上述的公理 1，2，此外还满足下面两个平凡的公理：

公理 3　整个集合是开集。

公理 4　空集是开集。

(对于一个集合，如果规定了一套开集，它们满足上述的公理 1～4，我们就说集合上定义了一个拓扑，具有拓扑的集合称为拓扑空间。也就是该集合具有拓扑结构。)

如果集合之间的一一映射保持拓扑结构不变，就称为拓扑等价，也叫同胚。如果 f 是拓扑空间E到拓扑空间 E' 中的一个映射，如果 E' 中每个开集的原象也都是E中

的开集，则 f 称为连续的。所以，同胚映射既是双映射，而且 f 及 $-f$ 的逆映射 f^{-1} 均为连续的。

拓扑空间有一些主要的性质，如紧性。拓扑空间 E 称为紧的，如果 Borel–Lebesque 公理成立：E 的任何一族开集覆盖，都存在有限多个开集也是 E 的覆盖。紧的概念是纯粹集合论中的"有限性"概念的代用品，它表示拓扑空间"近似地有限"。紧性是拓扑空间最重要的性质之一。

5. 复合结构

两种或多种结构可以复合而成更复杂的结构。每种结构都保持其独立性，但是它们之间通过映射、运算等关系联结在一起。复合结构最简单的例子是向量空间，它是以通常的三维欧几里得空间为模型进行抽象推广的结果。

向量空间是由域和交换群复合的结果，所谓域 F 上的向量空间 V，是指满足下列公理的集合 V，对于所有 a，$b \in F$，v，$w \in V$ 可定义 $a \cdot v \in V$，并满足：

1．V 是交换群(群运算为 $+$)。

2．$(ab)v = a(bv)$。

3．$(a+b)v = av + bv$。

4．$a(v+w) = av + aw$。

5．$1v = v$，这里 1 是 F 的乘法单位元。

V 中的元素可以称为向量或矢量，F 的元素称为数量或纯量、标量。av 表示数量和向量的数量乘法。这种运算不是在同一个代数结构中进行，这是与其他代数结构或多重结构的不同之处。

有的纯代数结构也可以看成是复合结构。例如复数域 $\mathbf{C}$ 可以看成是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的向量空间。这时数量乘法就是通常复数的乘法，只不过数量是实数就是了。例如 $a \in \boldsymbol{R}$，$b+ci \in \mathbf{C}$，$a(b+ci) = ab + aci$。而向量空间 $\mathbf{C}$ 的加法仍然是

原来复数的加法。

对于向量空间不难定义向量子空间。向量空间V的一个子集合$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$可以生成一个向量子空间。方法是做出$v_1,v_2,\cdots,v_n$的线性组合，即所有元素

$$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n$$

构成的集合，这里$a_1,a_2,\cdots,a_n\in F$。

假如$a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n=0$，当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$，我们就说向量$v_1,v_2,\cdots,v_n$线性无关。比如空间中三个互相垂直的向量就线性无关。如果v_1，v_2，v_n是V中一组线性无关的向量，而且它们生成的线性子空间正好是整个向量空间V，就说$\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$构成V的一组基。V的任何两组基的元素个数都相同，这数目称为向量空间的维数。

向量空间V到自身的变换$\alpha:V\to V$，如果对于所有a，$b\in F$，$v,w\in V$，满足$\alpha(av+bw)=a\alpha(v)+b\alpha(w)$，就称为一个线性变换。如果线性变换是一一满映射，就称为非异的。非异线性变换是向量空间的一个自同构。V的所有非异线性变换的全体构成一个群，称为一般线性变换群。

作为向量空间的推广，在现代同调代数中最常用的复合结构是模(module)。模是环和交换群的复合结构。设R为环，M为(左)R模，如果对于所有$x,y\in M$，$a,b\in R$，满足：

公理1　M具有交换群的结构(群运算为+)。

公理2　存在$R\times M\to M$上的映射，使得

(1)　$a(x+y)=ax+ay$

(2)　$(a+b)x=ax+bx$

(3)　$a(bx)=(ab)x$

这里“(左)”字表示环是在M的左方作用的，同样可以定义右R模。

如果环R具有单位元1，且对于M中所有元素x有

$1x=x$，则称 M 为有单位元的模，它是模中最常见的一种。

6. 多重结构

一个集合同时具有两种或两种以上的结构，这些结构之间有一定关系并且彼此相容，就称为一种多重结构。多重结构很多，如偏序群、全序群、拓扑群、拓扑环、拓扑域、偏序拓扑空间、拓扑向量空间等等。

例如，群 G 有加法运算（+）满足群的 4 条公理，它同时还满足全序关系（$\leqslant$），满足全序集合的 4 条公理，那么全序群当然就要满足上述 8 条公理。如果只是满足这 8 条公理，而群的结构和全序结构不发生关系，那么就不会出现什么有意思的结果。因此，还必须有两种结构之间的关系。一个自然的关系是在加法之下保持序关系不变，即对于 $a, b, c, d \in G$，有

公理 9　如 $a\leqslant b, c\leqslant d$，则 $a+c\leqslant b+d$。

最简单的全序群是整数加法群和实数加法群。它们都满足 Archimedes 公理：对任何两元素 a，b，总存在一个整数 n，使 $b\leqslant na$。

反过来，我们能够证明

定理：任何 Archimedes 全序群都同构于实数加法群的一个子群，因此是交换群。

这样一来，Archimedes 全序群的结构就完全清楚了。注意，这里对多重结构的同构有很多要求，既要作为群同构，又要作为全序集合同构，而且同构不能够破坏联系它们的公理。

同样，拓扑向量空间 V，一方面具有向量空间的结构，满足 5 条公理，另一方面也满足拓扑空间的 4 条公理，而且还要满足拓扑结构与向量空间结构相关联的公理，即

公理10 V中的代数运算(+)是连续的。
也就是说$x+y$是一对变元x,y的连续函数,λx是一对变元λ,x的连续函数。

7. 混合结构

在数学结构理论发展之前,数学所研究的种种对象,其本身已经具有丰富的结构,有时很难将它们简单归结为三大类型的结构及其复合结构和多重结构。有许多结构的相互关系非常复杂,进行细致的分析往往很繁琐,有时也没有必要。它们可以通通归结为混合结构。

混合结构最重要的例子是微分流形。微分流形是现代数学中最主要的概念之一,它可以看成是光滑曲线和曲面概念的推广。Riemann在1854年已经引进过这个概念。后来,又由H. Weyl给出了一个内在的定义,他把流形看成局部由Euclid空间互相连接而成。比如球面和环面都可以看作是由补钉相互重叠在一起而构成,但是由于彼此的交叠方式不同,有的成为球面,有的成为环面,有的成为更复杂的曲面。所以定义流形也就是规定(1)局部是几维Euclid空间,(2)它们是如何连接的,也就是在相互重叠处,它们的坐标是如何变换的。如果这种变换是可微的,就称为微分流形,如果是解析的,就称为解析流形。

在微分流形和解析流形上还可以叠床架屋地制造出更复杂的混合结构,其中包括现在应用特别广的"纤维丛"、"层"等等。

微分流形上每一点上还附有一个流形,就成为纤维丛。最简单的是向量丛,即每一点有一个向量空间。好象一个球面上每点有个切平面,这些切平面放在一起成为丛。从整体上来讲,它又有一个G结构。最常用的是Riemann结构及概复结构。除此之外,还可以有所谓"连络",连络是

比较两个邻近点上向量空间的差别的。这是现代微分几何学的重要研究对象。

如果微分流形上每一点上附有一个环，就成为“层”。这个概念在复解析几何学与代数几何学中是经常用到的。

微分流形是个比较理想的结构。除此之外，拓扑学还研究复形，它是由带棱带角的多角体搭配而成。复形是组合拓扑学的研究对象。

第十一章　千姿百态的数学世界

正象几十种原子构成我们这个丰富多彩的世界一样，前面所说的各种结构也构成了我们过去和现在都在研究的千姿百态的数学世界。

数学最古老的对象是自然数，自然数的集合具有全序半环的结构。自然数加上各自的负数成为整数，整数的集合是个全序环。整数环的商结构是有理数域，这是最简单的域，称为单域，它也是全序的。早在公元500年之前，就发现了不能用有理数表示的量，也就是无理数。数的无理性是一种否定的性质，无理数的集合谈不上有很好的性质。把无理数和有理数合在一起——实数的全体——是数学尤其是分析数学最基本的研究对象，它具有全序拓扑域的结构，而且通过它把直线上的点和实数一一对应起来，给最基本的几何图形加以数的分析。比实数更一般的数是复数，也就是一个实数 a 和一个虚数 ib 的复合数，这里 i 是 $\sqrt{-1}$。复数的全体复数域比实数域 $\boldsymbol{R}$ 少了自然的顺序结构，但是，它却有了“代数封闭性”这个更好的代数性质，因此，它往往比实数域 $\boldsymbol{R}$ 有更多的用途。这里所说的代数封闭性，是指系数取在 $\boldsymbol{C}$ 中的代数方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$ 的 n 个根同时都在 $\boldsymbol{C}$ 里面。但是，当系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都在 $\boldsymbol{R}$ 里面时，方程的根就不一定在 $\boldsymbol{R}$ 里面，比如 $x^2+1=0$ 在实数域中就没有解，所以实数域不是代数封闭的。

长期以来，实数域 $\boldsymbol{R}$ 和复数域 $\boldsymbol{C}$ 是微积分乃至数学分析的基础对象。平常所说的函数实际上就是由 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射。比如 $f(x)=x^3$，就是把1映成1、2映成8、3映

成 27、…的从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的映射。如果映射不仅是集合之间的对应，而且还保持结构不变，那么这种映射往往称为态射。有的函数比如单调（递增）函数，就是由 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}$ 保持全序结构的态射，连续函数就是由 R 到 R 保持拓扑结构的态射。古典分析数学就是研究实数到实数，复数到复数的函数，有时也称为函数论。

在我们有了结构的观念以后，眼界扩大了许多。于是，函数就不限于实变数的实函数和复变数的复函数了，在集合上也可以定义函数，在函数空间上也可以定义函数，这就是泛函。泛函并不神秘，实际上，某一些曲线的集合上的泛函可以定义为那一点所代表的曲线的长度。平面上的一块集合可以定义面积，并经过推广而成为"测度"。这样一来，"泛函"及"测度"等观念把古典分析的领域大大地扩充了。

古典几何的点、线、面的概念也大大推广了。一方面是我们不必局限于研究一维、二维、三维空间（也叫一度、二度、三度），而可以研究高维空间（如四维、五维空间对相对论的研究就很有必要），还可以扩展到无穷维空间。另一方面，曲线、曲面也推广到一般的微分流形上。过去微分方程、偏微分方程都是定义在欧氏空间中的一块区域，现在我们可以研究球面上、环面上乃至一般流形上的常微分方程、偏微分方程等等，这在 20～30 年前还很少见，现在已经汇集成"大范围分析"这门蓬勃发展的学科的主要课题了。

1872 年，F. Klein 发表了 Erlangen 纲领，用变换群的观点来整理几何学。大约同时，挪威数学家 S. Lie（李），研究用他名字定义的李群，当时的几何变换群都是李群。李群也是结构十分丰富的数学对象，它不仅是兼具代数结构和拓扑结构的拓扑群，而且还是微分流形。李群结构是现在了解得比较清楚的少数结构之一。Dieudonné 曾经讲过："李群成为数学的中心，没有它什么大事也干不成。"这种说法虽然有些过分，却由此可以看出这种多种结构相互

作用的对象的重要性，正是它深刻反映了现实世界的丰富多彩。Bourbaki 的主要成员几乎都是李群的专家，《数学原理》也花了很长的篇幅用一卷专讲李群。李群在现代数学几乎所有的部门中都有着深刻的影响，这是与它的结构的研究分不开的。

李群的孪生兄弟是代数群。顾名思义，代数群是群和代数簇结合在一起而成的结构。古典几何学一个重要的研究对象是代数曲线、代数曲面，例如圆锥曲线(圆、椭圆、抛物线、双曲线)及抛物面、椭球等等，它们的方程都是代数方程。而代数簇则是由一般的代数方程或方程组定义的集合。研究代数簇的性质的学科是代数几何学。正是 Bourbaki 的成员先后给代数几何学奠定了严格而广泛的基础，使这门学科成为 Bourbaki 数学的代表作，其博大精深是无与伦比的。

第十二章 结束语

在20世纪的数学发展过程中，Bourbaki学派起着承前启后的作用。他们把人类长期积累起来的数学知识按照数学结构整理成为一个井井有条博大精深的体系，他们的《数学原理》成为一部新的经典著作，还是许多研究工作的出发点与参考指南。这个体系连同他们对数学的贡献，已经无可争辩地成为当代数学的一个重要组成部分，并成为蓬勃发展的数学科学的主流。

但是数学内容的丰富性及多样性，数学发展的不平衡性，尤其是数学与其他科学的千丝万缕的联系以及科学技术和社会发展的需要，不断向数学提出新的问题。电子计算机的飞速发展，对数学产生了巨大冲击，从而使得局限在纯粹数学的象牙之塔中的Bourbaki诸公难以适应新的形势。过去，他们是20多岁朝气蓬勃的青年，以“初生之犊不怕虎”的大无畏精神，敢于对旧的、腐朽的东西进行冲击，敢于用自己的观点检查一切、批判一切。那时，他们在困难中成长壮大，生机勃勃、不可一世。可是现在他们衰老了，他们的接班人虽然年轻，但是比起开拓者来讲，就缺乏首创精神，即使还不至墨守成规，缺乏独创，但已使Bourbaki学派从精神上开始老化。

数学是年轻人的科学，只有不断注入新鲜血液才能维持数学之树常青。不过，Bourbaki学派完成了它的历史任务，并已经被送进了坟墓。可是Bourbaki的名声不可磨灭，它的遗产将永世长存!

外国人名索引

事项索引

（以下术语按汉语拼音顺序排列，术语后的数码代表该术语首次出现的页码）

G

H

J

L

Y

Z

参考文献

[1] N. Bourbaki, Elements de Mathematique I～XXXIX (1939～) Hermann, Paris.

[2] J. Dieudonné, Panorama des Mathematique pures, Le choix bourbachique, 1977, Bordas, Paris.

[3] J. Dieudonné, Amer. Math Monthly, 77.3,1970.

[4] J. Dieudonné, ed Abrégé d'Histoire des mathematiques tome I, II, 1978, Hermann, Paris.

[5] H. Cartan Math. Intelligencer, 3:3, 1980.

[6] A. Weil: Oeuvres scientifiques I～III Springer, Berlin, 1979.

[7] H. Cartan Oeuvres I～III, Springer 1979 Berlin (Remmert, R. ed.).

[8] J. Delsarte Oeuvres de Jean Delsarte I～II, 1971, CNRS Paris.

[9] J. Dieudonné Choix d'Ocuvres Mathematiques Tome I, II, Hermann, 1981.

[10] Halmos Sci. Am. 64,5,1957, May.

[11] J. Dieudonné, History of functional analysis North-Holland, Amsterdam, 1981.

[12] H. Cartan, Seminaire Henri Cartan 1948/1949～1963/1964, Secrétariat Mathematique, Paris.

[13] N. Bourbaki, Seminaire Bourbaki 1948/1949～1981/1982 Secrétariat Mathematique, Paris.

[14] D. Hilbert, Gesammelte Abhandlangen Bd I～III, 1932～1935, Springer Berlin.

[15] C. Reid, Hilbert, Springer, Berlin, 1970.

[16] C. Reid, Courant in Göttingen and New York, Springer, Berlin, 1976.

[17] G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen, und Philosophischen Inhalts, Springer, Berlin, 1980.

[18] J. W. Dauben, Georg Cantor, his mathematics and philosophy of the infinite Harvard Unir. Press, Cambridge

Mass, 1979.

[19] N. Bourbaki Elements d'histoire des mathematiques Hermann-Paris, 1969.